LÊ HẢI CHÂU

DẠY TỐT HỌC TỐT

Các dạng Toán cơ bản & nâng cao 11

LƯỢNG GIÁC

Bài tập tự luận và trắc nghiệm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU

Các dạng toán
cơ bản & nâng cao

LƯỢNG GIÁC 11

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Vài dòng mở đầu

Chương trình "Đại số và giải tích" lớp 11 gồm hai phần:

Phần 1. Hàm số lượng giác – Phương trình và hệ phương trình lượng giác.

Phần 2. Dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân. Giới hạn, hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Tập sách "Các dạng toán cơ bản và nâng cao" lớp 11 được biên soạn thành hai cuốn:

- Lượng giác lớp 11

- Giải tích lớp 11.

*Cuốn **"Lượng giác lớp 11"** gồm 6 dạng toán điển hình, mỗi dạng được trình bày như sau:*

a) Kiến thức cần nắm vững

b) Đề bài

c) Gợi ý phương pháp giải – Giải

d) Bài toán tự giải (chỉ có đáp số)

e) Bài tập trắc nghiệm

*Ngoài ra cuối một số dạng toán còn có mục **"Bạn có biết?"** gồm những mẩu chuyện toán học vừa nâng cao hiểu biết, mở rộng tầm mắt, vừa có tính chất giải trí.*

Hi vọng, cũng như cuốn "Các dạng toán cơ bản và nâng cao", bồi dưỡng đại số lớp 10 đã xuất bản, cuốn sách này sẽ giúp ích thiết thực cho đông đảo các em học sinh (và cả các bậc phụ huynh) để nâng cao trình độ toán học của mình vươn lên học giỏi môn Toán.

LÊ HẢI CHÂU

Dạng toán 1

CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Góc và cung lượng giác

1) Để đo các góc ta dùng đơn vị "độ":

Góc $1^0 = \frac{\pi}{180}$ góc bẹt; $1^0 = 60'$; $1' = 60''$.

Ngoài ra còn có một đơn vị khác, đó là "*radian*" (viết tắt là rad):

$$1^0 = \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0,01745\text{rad}$$

$$1\text{rad} = \frac{180}{\pi}\text{độ} \approx 57^0 17'45''.$$

Độ	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Trên đường tròn bán kính R, cung có số đo α rad có độ dài là:

$$l = R\alpha.$$

Nếu $\alpha = 1$ thì $l = R$: Cung có số đo 1 radian là cung có độ dài bằng bán kính của đường tròn mang cung đó.

2) Góc và cung lượng giác

Với hai tia Ox, Oy cho trước có vô số góc lượng giác cùng kí hiệu (Ox, Oy).

So với góc lượng giác kí hiệu là sđ(Ox, Oy), ta có công thức:

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = \begin{cases} a^0 + k.360^0 & (k \in Z) \\ \alpha + k.2\pi & (k \in Z) \end{cases}$$

Số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ là số đo của góc (Ox, Oy) còn viết là (OA, OB).

3) Đường tròn lượng giác

Đó là đường tròn định hướng có bán kính bằng đơn vị độ dài (R = 1).

Muốn biểu diễn cung α trên đường tròn lượng giác chỉ cần xác định điểm ngọn của cung này. Nếu α là một số thực cho trước thì các hệ thức:

$$\text{sđ}\,\widehat{AM} \text{ hoặc } \alpha + k.2\pi \ (k \in Z)$$

xác định một và chỉ một điểm M trên đường tròn lượng giác.

Các hàm số lượng giác

Các giá trị sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là *các giá trị lượng giác của cung α*.

Trục tung còn gọi là *trục sin*, trục hoành còn gọi là *trục cosin*.

Bảng giá trị lượng giác của một số cung hay góc đặc biệt như sau:

Góc / Giá trị lượng giác	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	||
cot α	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1.$$

Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

1) Cung đối nhau: α và $(-\alpha)$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

2) Cung bù nhau: α và $(\pi - \alpha)$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

3) Cung hơn kém π: α và $(\alpha + \pi)$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

4) Cung phụ nhau: α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

Hàm số lượng giác ngược

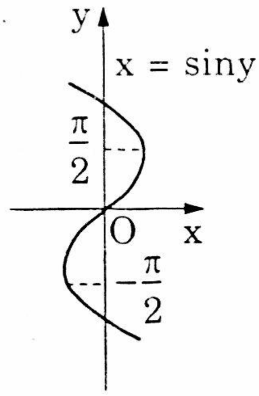
1) Xét hàm số $y = \sin x$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ với điều kiện $-1 \le y \le 1$.

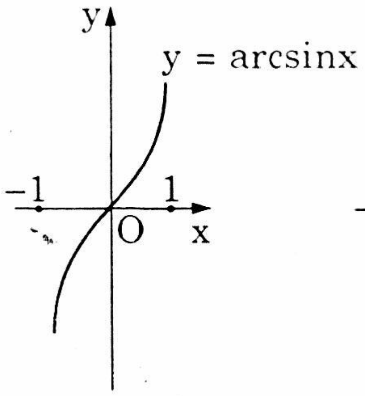
Trong đoạn này chỉ có một cung duy nhất $x = \arcsin y$ mà sin bằng y. Hàm số này gọi là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$.

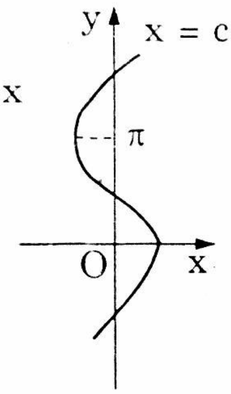
Hàm số $y = \arcsin x$ có miền xác định là $[-1; 1]$ và tập hợp các giá trị của nó là đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (đọc là: y là cung có sin bằng x).

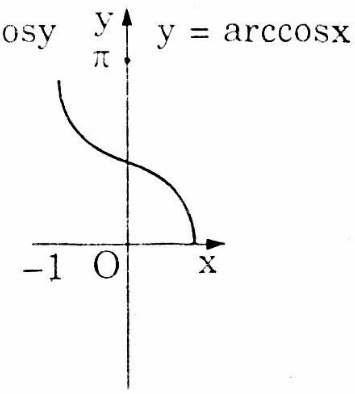
Hàm số $y = \arccos x$ có miền xác định là $[-1; 1]$ và tập hợp các giá trị của nó là đoạn $[0; \pi]$ (đọc là: y là cung có cosin bằng x).

Đồ thị hai hàm số này như sau:





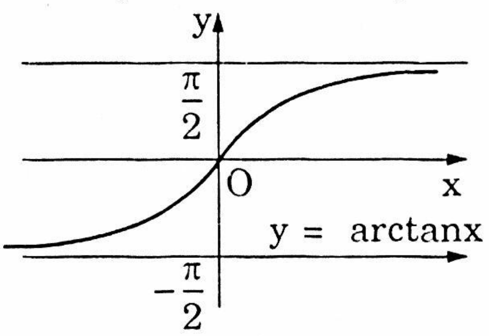


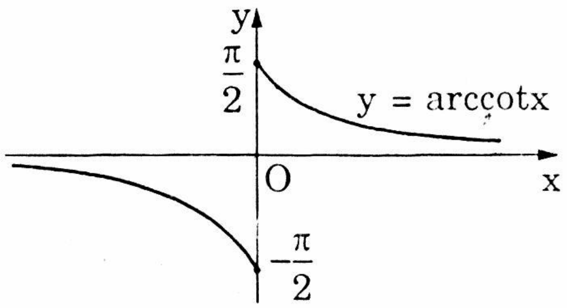


2) Hàm số $y = \arctan x$ có miền xác định là R và tập hợp các giá trị của nó là đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (đọc là: y là cung có tang bằng x).

Hàm số $y = \text{arccot}\, x$ có miền xác định là R và tập hợp các giá trị của nó là đoạn $[0; \pi]$ (đọc là: y là cung có cotang bằng x).

Đồ thị hai hàm số này như sau:





3) **Các tính chất**

a) $\sin(\arcsin x) = x$; $\cos(\arccos x) = x$

$\tan(\arctan x) = x$; $\cot(\text{arccot}\, x) = x$.

b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \left(-1 < x < 1\right)$

$\cot(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \left(-1 \le x \le 1, x \ne 0\right)$.

B. ĐỀ BÀI

Bài 1. Trong pháo binh, một li giác $= \dfrac{1}{6000}$ góc đầy. Hỏi:

a) Một li giác bằng bao nhiêu độ, bao nhiêu radian?

b) 1 radian bằng mấy li giác, một độ bằng mấy li giác?

Bài 2. Xác định dấu của:

a) $\tan\dfrac{7}{3}$; b) $\cos(\sin 2)$.

Bài 3. Nếu $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì dấu của các tích sau là dấu gì:

$$T_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).\cot(\pi + x)?$$

$$T_2 = \sin(\pi + x).\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).\tan(\pi - x)?$$

Bài 4. Với giá trị nào của α thì ta có đẳng thức sau:

a) $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$; b) $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$;

c) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$; d) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$?

Bài 5. Tích $\sin(1,5\pi - \beta).\cos(0,5\pi + \beta).\cot(\pi + \beta)$ với $0 < \beta < 0,5\pi$ là dương hay âm?

Bài 6. Với giá trị nào của β thì ta có các đẳng thức sau:

a) $\sin\beta = \dfrac{(m + n)^2 - 2mn}{2mn}$ (m ≠ n, m và n đều dương)?

b) $\dfrac{1}{\sin\beta}.\sqrt{\dfrac{1}{1 + \cos\beta} + \dfrac{1}{1 - \cos\beta}} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}(2 + \cot^2\beta)$?

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\tan^2\alpha - 1}$;

b) $N = (1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)(1 + \cos\gamma) = (1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)(1 - \cos\gamma)$.

Bài 8. Tính giá trị của tổng $\sin^4\beta + \cos^4\beta$ nếu:

a) $\sin\beta.\cos\beta = -\frac{1}{2}$;

b) $\sin\beta + \cos\beta = m$.

Bài 9. Rút gọn:

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$;

b) $\sin^4 y - \cos^4 y + \cos^2 y$;

c) $\cos^4 y + \sin^2 y + \sin^2 y\cos^2 y$;

d) $\left(\frac{\tan z + \cot z}{\tan z - \cot z} - \frac{\tan z - \cot z}{\tan z + \cot z}\right).\left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\cos^2 z}\right)$.

Bài 10. Tính:

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ nếu $\cot\alpha = -\frac{8}{15}$ và $\sin\alpha > \cos\alpha$;

b) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ nếu $\tan\alpha - \cot\alpha = 3$;

c) $\tan\alpha + \cot\alpha$ nếu $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$;

d) $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ nếu $\tan\alpha = \frac{2}{5}$.

Bài 11. Chứng minh rằng:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha.\cot\alpha + \sin\alpha.\tan\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$;

b) $\frac{\sin\beta + \cos\beta}{\sin\beta - \cos\beta} - \frac{1 + 2\cos^2\beta}{\cos^2\beta(\tan^2\beta - 1)} = \frac{2}{1 + \tan\beta}$.

Bài 12. Rút gọn:

a) $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\cos(2\pi - x).\sin(\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-x)}$;

b) $\cot t(1 - \tan t)(\sin t + \cos t)$;

c) $\frac{1 - \sin^4 y - \cos^4 y}{\cos^4 y}$;

d) $(\sin z + \tan z)(\cos z + \cot z)$.

Bài 13

a) Tính $\dfrac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ biết $\tan\alpha = -7$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) Tính $\sin\alpha - \sqrt{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha}$ biết $\sin\alpha = 0{,}75$ và $\pi < \alpha < 2\pi$

Bài 14. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{\sin^4 y + \cos^4 y - 1}{\sin^6 y + \cos^6 y - 1} = \dfrac{2}{3}$; b) $\dfrac{\sin^2 y - \tan^2 y}{\cos^2 y - \cot^2 y} = \tan^6 y$.

Bài 15. Rút gọn:

a) $A = \dfrac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\pi - \alpha)} + \dfrac{\tan(\alpha - \pi).\cos(\alpha + \pi)}{\dfrac{1}{\cos\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right)}}$;

b) $B = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right).\sin(\pi + \beta) + \cos(\pi - \beta).\sin(-\beta) +$

$\cos(\pi + \beta).\cos\left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right).\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right)$;

c) $C = \left(\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}\right)$.

Bài 16

a) Tính giá trị của biểu thức:

$P = \dfrac{\cos\varphi\cot\varphi - \sin\varphi\tan\varphi}{\dfrac{1}{\sin\varphi} - \dfrac{1}{\cos\varphi}}$, biết $\sin\varphi\cos\varphi = p$.

b) Tính giá trị của biểu thức

$Q = \tan^3\varphi + \cot^3\varphi$, biết $\tan\varphi + \cos\varphi = q$.

Bài 17

a) Biến đổi hiệu: $1 - (\sin^6\varphi + \cos^6\varphi)$ thành một tích.

b) Tính tổng $\sin^5\varphi + \cos^5\varphi$, biết $\sin\varphi + \cos\varphi = m$.

Bài 18. Chứng minh rằng trong tam giác DEF ta có các hệ thức sau:

a) $\sin\frac{D+E}{2} = \cos\frac{F}{2}$;

b) $\cos F = -\cos(D+E+2F)$;

c) $\tan\frac{D+E}{2} = \cot\frac{F}{2}$.

Bài 19

a) Tính $\cos\alpha$ biết:

$$3\sin^2(2\pi-\alpha) - 7\sin\alpha(\alpha-\frac{\pi}{2}) + 3 = 0.$$

b) Tính $\tan\beta$ biết:

$$\sin(2\pi-\beta)\cos(\pi-\beta) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right) - \sin^2(2\pi-\beta) = 0.$$

Bài 20. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

rồi minh họa bằng dựng tam giác ABC có cạnh huyền bằng 1 và một góc nhọn bằng α.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

Bài 21. Tính giá trị của:

a) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; b) $\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

c) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$; d) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 22. Chứng minh rằng:

a) $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$ (với $-1 \le \alpha \le 1$);

b) $\arctan\beta + \operatorname{arccot}\beta = \frac{\pi}{2}$.

Bài 23

a) Cho hàm số $y = \arccos x^2$. Hàm số này chẵn hay lẻ?

Vẽ đồ thị của nó.

b) Cho hàm số $y = \arccos^2 x$. Hàm số này đồng biến hay nghịch biến?

Vẽ đồ thị của nó.

Bài 24. Chứng minh rằng:

$$\arctan x = \begin{cases} \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x} \text{ nếu } x > 0 \\ \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x} - \pi \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$

Áp dụng: Vẽ đồ thị hàm số $y = \arctan x - \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$.

Bài 25. Cho hàm số $y = \arcsin(\sin x)$.

a) Hàm số này xác định trong khoảng nào? Có nhận xét gì nếu thay $x = \dfrac{\pi}{6}$ và $x = \dfrac{5\pi}{6}$?

b) Do chu kì của nó cũng là chu kì của sinx nên chỉ cần xét nó trong đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right]$ (tức là 2π).

c) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.

Bài 26. Chứng minh đẳng thức:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Bài 27. Tổng $\arctan 2 + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ bằng bao nhiêu?

C. GỢI Ý PHƯƠNG PHÁP GIẢI – GIẢI

Bài 1

$$1 \text{ li giác} = \frac{1}{6000} \times 360^\circ = \frac{3^\circ}{50}; \; 1 \text{ li giác} = \frac{1}{6000} \times 2\pi = \frac{\pi}{3000} \text{rad};$$

1radian $= \frac{3000}{\pi}$ li giác; 1 độ $= \frac{50}{3}$ li giác.

Bài 2

a) Với $\tan\frac{7}{3}$ ta có $\frac{\pi}{2} < \frac{7}{3} < \pi$ nên $\tan\frac{7}{3} < 0$;

b) Vì $-1 \le \sin 2 \le 1$ nên $-\frac{\pi}{2} < \sin 2 < \frac{\pi}{2}$, do đó $\cos(\sin 2) > 0$.

Bài 3

Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < 0, \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0, \cot(\pi + x) > 0$, do đó $T_1 > 0$;
- $\pi < \pi + x < \frac{3}{2}\pi$ nên $\sin(\pi + x) < 0$, $\frac{3}{2}\pi < \frac{3}{2}\pi + x < 2\pi$ nên

$\cos(\pi + x) > 0$, $\frac{\pi}{2} < \pi - x < \pi$ nên $\tan(\pi - x) < 0$, do đó $T_2 > 0$.

Bài 4

a) Ta có đẳng thức $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, do $\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ là căn số học nên $\sin\alpha \le 0$, mà $\sin\alpha \le 0$ kvck α tận cùng trong góc phần tư thứ ba hoặc thứ tư tức là với $(2k - 1)\pi \le \alpha \le k.2\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

b) Đẳng thức $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$ đúng với mọi α.

c) Đẳng thức $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ đúng với mọi α, trừ $\alpha = (2k + 1)\pi$.

d) Đẳng thức $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ đúng khi $\sin\frac{\alpha}{2} \ge 0$, tức là

$k.2\pi \le \frac{\alpha}{2} \le (2k + 1)\pi$, hay $4k.\pi \le \alpha \le (4k + 2)\pi$.

Bài 5

Nếu $0 < \beta < 0,5\pi$ thì $\sin(1,5\pi - \beta) < 0, \cos(0,5\pi + \alpha) < 0$ và $\cot(\pi + \beta) > 0$.

Suy ra tích là dương.

Bài 6

a) Ta có:

$\sin\beta = \dfrac{m^2 + 2mn + n^2 - 2mn}{2mn} = \dfrac{(m-n)^2}{2} + 1 > 1$. Nhưng $|\sin\beta| \le 1$ nên đẳng thức này không thể xảy ra.

b) Ta có: $\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos\beta} + \dfrac{1}{1-\cos\beta}} = \sqrt{\dfrac{2}{1-\cos^2\beta}} = \sqrt{\dfrac{2}{\sin^2\beta}} = \dfrac{\sqrt{2}}{|\sin\beta|}$.

Do đó vế trái của đẳng thức đã cho bằng:

$$\frac{1}{\sin\beta} - \frac{\sqrt{2}}{|\sin\beta|} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sin\beta\,|\sin\beta|}\right).$$

Muốn trong dấu ngoặc cuối này trở thành $2 + \cot^2\beta$ thì $|\sin\beta| = -\sin\beta$ tức là $\sin\beta < 0$. Thật thế, trong trường hợp này biểu thức trong ngoặc sẽ là $1 + \dfrac{1}{\sin^2\beta} = 2 + \cot^2\beta$. Thế thì với $\sin\beta < 0$, ta có $(2k+1)\pi < \beta < (2k+2)\pi$.

Bài 7

a) Biến đổi phân thức thứ hai.

$\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\tan^2\alpha - 1} = \dfrac{\cos^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

Do đó biểu thức đã cho có thể viết:

$M = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, hay

$M = \sin\alpha + \cos\alpha$.

b) Nhân cả hai vế với tích $(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)(1 + \cos\gamma)$ được:

$N = \left[(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\right]^2 = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)$,

hay

$$N = \sin^2\alpha.\sin^2\beta.\sin^2\gamma.$$

Biểu thức $(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)(1 + \cos\gamma)$ không âm với mọi α, β, γ (vì $|\cos\alpha| \le 1$) nên ta có:

$$N = |\sin\alpha|.|\sin\beta|.|\sin\gamma|.$$

Nếu $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ đều dương thì $N = \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$.

Bài 8

a) $\sin^4\beta + \cos^4\beta = (\sin^2\beta + \cos^2\beta)^2 - 2\sin^2\beta\cos^2\beta$

$$= 1^2 - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

b) $\sin^4\beta + \cos^4\beta = 1 - 2\sin^2\beta\cos^2\beta\ (*)$. Lại có $(\sin\beta + \cos\beta)^2 = m^2$,

suy ra $\sin\beta.\cos\beta = \frac{m^2-1}{2}$. Thay vào (*) được:

$$\sin^4\beta + \cos^4\beta = 1 - 2\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(2m^2 - m^4 + 1).$$

Bài 9

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x +$
$+ \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1 + 1 = 2.$

b) $\sin^4 y - \cos^4 y + \cos^2 y = (\sin^2 y + \cos^2 y)(\sin^2 y - \cos^2 y) + \cos^2 y =$

$$= \sin^2 y - \cos^2 y + \cos^2 y = \sin^2 y.$$

c) $\cos^4 y + \sin^2 y + \sin^2 y\cos^2 y = \cos^2 y(\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 y =$

$$= \cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

d) Thừa số thứ nhất có thể viết:

$$\frac{\tan z + \cot z}{\tan z - \cot z} - \frac{\tan z - \cot z}{\tan z + \cot z} = \frac{(\tan z + \cot z)^2 - (\tan z - \cot z)^2}{\tan^2 z - \cot^2 z} =$$

$$= \frac{4\tan z.\cot z}{\tan^2 z - \cot^2 z} = \frac{4}{\tan^2 z - \cot^2 z} = \frac{4}{\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} - \frac{\cos^4 z}{\sin^2 z}} = \frac{4\sin^2 z\cos^2 z}{\sin^4 z - \cos^4 z}.$$

Thừa số thứ hai có thể viết:

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin^2 z.\cos^2 z}.$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$\frac{4\sin^2 z\cos^2 z}{\sin^4 z - \cos^4 z}.\frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin^2 z\cos^2 z} = \frac{-4}{\cos^2 z + \sin^2 z} = -4.$$

Bài 10

a) Ta có ngay $\tan\alpha = -\frac{15}{8}$, thế thì $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{15}{8}$ hay $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{225}{64}$;

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{225}{64}$. Từ đó $\cos\alpha = -\frac{8}{15}$ và $\sin\alpha = 1$ (do $\sin\alpha < \cos\alpha$).

b) Nếu $\tan\alpha - \cot\alpha = 3$ thì $(\tan\alpha - \cot\alpha)^2 = 9$, hay

$\tan^2\alpha + \cot^2\alpha - 2\tan\alpha\cot\alpha = 9$, mà $\tan\alpha\cot\alpha = 1$ nên

$\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 9 + 2 = 11$.

c) Ta có: $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Nếu $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ thì $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$ hay $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Do đó $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$. Vậy $\tan\alpha + \cot\alpha = -\frac{8}{3}$.

d) Chia tử và mẫu của biểu thức $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ cho $\cos\alpha$ được

$\frac{\tan\alpha + 2}{1 - 3\tan\alpha}$. Thay $\tan\alpha = \frac{2}{5}$, ta có : $\frac{\frac{2}{5} + 2}{1 - 3\times\frac{2}{5}} = \frac{\frac{12}{5}}{1 - \frac{6}{5}} = \frac{12}{5} \times \frac{5}{-1} = -12$.

Bài 11

a) Biến đổi vế trái:

$$\sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\text{, đúng bằng vế phải.}$$

b) Biến đổi vế trái:

$$\frac{\tan\beta + 1}{\tan\beta - 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2\beta} + 2}{\tan^2\beta - 1} = \frac{(\tan\beta + 1)^2 - \tan^2\beta - 3}{\tan^2\beta - 1} =$$

$$= \frac{2(\tan\beta - 1)}{\tan^2\beta - 1} = \frac{2}{\tan\beta + 1}\text{, đúng bằng vế phải.}$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1873

Bài 12

a) Biểu thức đã cho có thể viết gọn như sau:

$$\frac{\cot x.\cos x.\sin x}{\cos x.\cos x} = 1, \text{ vì } \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x, \cos(2\pi - x) = \cos x,$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,\ \cos(-x) = \cos x.$$

b) Biểu thức đã cho có thể viết:

$$\cos t\left(1 - \frac{\sin t}{\cos t}\right)(\sin t + \cos t) = \left(\cos t - \frac{\cos t \sin t}{\cos t}\right)(\sin t + \cos t) =$$

$$(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

c) Biến đổi tử:

$$1 - \sin^4 y - \cos^4 y = 1 - (\sin^4 y + 2\sin^2 y\cos^2 y + \cos^4 y) + 2\sin^2 y\cos^2 y$$

$$= 1 - (\sin^2 y + \cos^2 y)^2 + 2\sin^2 y\cos^2 y = 1 - 1 + 2\sin^2 y\cos^2 y$$

$$= 2\sin^2 y\cos^2 y.$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$\frac{2\sin^2 y\cos^2 y}{\cos^4 y} = 2.\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = 2\tan^2 y.$$

d) Biểu thức đã cho có thể viết:

$$\sin z\cos z + \cos z + \sin z + 1 = \cos z(\sin z + 1) + (\sin z + 1)$$

$$= (\sin z + 1)(\cos z + 1).$$

Bài 13

a) Biểu thức đã cho có thể viết:

$$\frac{3\sin\alpha.\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha.\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha(3\tan\alpha + 1)}{\cos\alpha(1 - 3\tan\alpha)} = \frac{-21 + 1}{1 + 21} = -\frac{10}{11}.$$

b) Ta có: $\sqrt{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}}$

$$= \sqrt{\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{|\sin\alpha|}.$$

Nhưng $\sin\alpha < 0$ khi $\pi < \alpha < 2\pi$ nên $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ và biểu thức đã cho trở thành:

$$\sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Thay $\sin\alpha = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ được giá trị biểu thức là $\frac{4}{3}$.

Bài 14

a) Biến đổi vế trái:

$$\frac{(\sin^2 y + \cos^2 y)^2 - 2\sin^2 y\cos^2 y - 1}{(\sin^2 y + \cos^2 y)(\sin^4 y - \sin^2 y\cos^2 y + \cos^4 y) - 1} =$$

$$= \frac{-2\sin^2 y\cos^2 y}{(\sin^2 y + \cos^2 y)^2 - 3\sin^2 y\cos^2 y - 1} = \frac{-2\sin^2 y\cos^2 y}{-3\sin^2 y\cos^2 y} = \frac{2}{3},$$

đúng bằng vế phải.

b) Biến đổi vế trái:

$$\frac{\sin^2 y\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)}{\cos^2 y\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2 y}\right)} = \tan^2 y.\frac{1 - 1 - \tan^2 y}{1 - 1 - \cot^2 y} = \frac{\tan^4 y}{\cot^2 y} = \tan^6 y,$$

đúng bằng vế phải.

Bài 15

a) Do $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $\tan(\alpha - \pi) = -\tan(\pi - \alpha)$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = \cos\alpha$ và $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\alpha$, nên biểu thức đã cho có thể viết:

$$A = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\alpha} + \frac{\tan(\pi - \alpha)\cos\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\tan\alpha\cos\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}},$$

$$= 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

b) Do $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\beta$; $\sin(\pi + \beta) = -\sin\beta$; $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$;

$\sin(-\beta) = -\sin\beta$; $\cos(\pi + \beta) = -\cos\beta$; $\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\beta$, và

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cot\beta$; $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -\tan\beta$; nên biểu thức đã cho có thể viết:

$$B = \sin\beta\sin\beta + \cos\beta\sin\beta - \cos\beta\sin\beta - \cot\beta\tan\beta =$$
$$= \sin^2\beta - 1 = -\cos^2\beta.$$

c) Do $|\sin\alpha| \le 1$ và $|\cos\alpha| \le 1$ nên tất cả biểu thức dưới dấu căn đều không âm, do đó:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = -\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = -\frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}.$$

Vậy $C = \dfrac{4\sin\alpha\cos\alpha}{|\cos\alpha|\,|\sin\alpha|} = 4.\dfrac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}.\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}$.

Với cung tận cùng trên nửa đường tròn lượng giác phía trên thì $\sin\alpha > 0$ nên $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, với cung tận cùng trên nửa đường tròn lượng giác phía dưới thì $\sin\alpha < 0$ nên $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$.
Với cung tận cùng trên nửa đường tròn lượng giác bên phải thì $|\cos\alpha| = \cos\alpha$, với cung tận cùng trên nửa đường tròn lượng giác bên trái thì $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$. Vậy, cuối cùng ta được:

$$C = \begin{cases} 4 \text{ nếu } k.2\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi \text{ (góc phần tư I)} \\ -4 \text{ nếu } \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi < \alpha < (2k+1)\pi \text{ (góc phần tư II)} \\ 4 \text{ nếu } (2k+1)\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi + k.2\pi \text{ (góc phần tư III)} \\ -4 \text{ nếu } \dfrac{3}{2}\pi + k.2\pi < \alpha < 2(k+1)\pi \text{ (góc phần tư IV).} \end{cases}$$

Bài 16

a) Trước hết ta biến đổi P sao cho xuất hiện được tích $\sin\varphi\cos\varphi$ như sau:

$$P = \frac{\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} - \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}}{\dfrac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}} = \frac{\cos^3\varphi - \sin^3\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}.\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$= \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$= 1 + \sin\varphi\cos\varphi = 1 + p$$

b) Ta có: $Q = (\tan\varphi + \cot\varphi)(\tan^2\varphi - \tan\varphi\cot\varphi + \cot^2\varphi)$

$= q(q^2 - 2 - 1) = q(q^2 - 3)$.

Bài 17

Ta có: $\sin^6\varphi + \cos^6\varphi = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(\cos^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^4\varphi)$

$= \cos^4\varphi - \sin^2\varphi.\cos^2\varphi + \sin^4\varphi$

$= \cos^2\varphi(1 - \sin^2\varphi) - \sin^2\varphi.\cos^2\varphi + \sin^2\varphi(1 - \cos^2\varphi)$

$= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 3\cos^2\varphi.\sin^2\varphi = 1 - 3\cos^2\varphi.\sin^2\varphi$.

Từ đó ta có ngay: $1 - (\sin^6\varphi + \cos^6\varphi) = 3\sin^2\varphi.\cos^2\varphi$.

b) Ta có: $\sin^5\varphi + \cos^5\varphi =$

$= (\sin\varphi + \cos\varphi)(\sin^4\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)$

$= (\sin\varphi + \cos\varphi)\left[(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - \sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]$ (*)

Bình phương đẳng thức đã cho $\sin\varphi + \cos\varphi = m$, được:

$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + 2\sin\varphi\cos\varphi = m^2$,

từ đó: $\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{m^2 - 1}{2}$;

$\sin^4\varphi + \cos^4\varphi = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$

$= 1 - \dfrac{(m^2 - 1)^2}{2} = \dfrac{1 + 2m^2 - m^4}{2}$.

Thay vào (*) được:

$$\sin^5\varphi + \cos^5\varphi = m\left[\frac{1 + 2m^2 - m^4}{2} - \frac{m^2 - 1}{2} + \frac{(m^2 - 1)^2}{4}\right]$$

Từ đó tổng $\sin^5\varphi + \cos^5\varphi = \dfrac{m}{4}(5 - m^2)$.

Bài 18

a) Ta có: $\dfrac{D + E}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{F}{2}$. Do đó:

$\sin\dfrac{D + E}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{F}{2}\right) = \cos\dfrac{F}{2}$.

b) Do $D + E + F = \pi$ nên $D + E + 2F = \pi + F$. Do đó:

$\cos(D + E + 2F) = \cos(\pi + F) = -\cos F$

hay $\cos F = -\cos(D + E + 2F)$.

c) $\tan\dfrac{D+E}{2} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{F}{2}\right) = \cot\dfrac{F}{2}$.

Bài 19

a) Ta có: $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

Như vậy biểu thức đã cho trở thành: $3\sin^2\alpha + 7\cos\alpha + 3 = 0$,

hay $3\cos^2\alpha - 7\cos\alpha - 6 = 0$. Giải phương trình bậc hai mà ẩn là $\cos\alpha$ này được hai nghiệm $\cos\alpha_1 = 3 > 1$ (loại) và $\cos\alpha_2 = -\dfrac{2}{3}$.

b) Do $\sin(2\pi - \beta) = \sin(-\beta) = -\sin\beta$;

$\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$; $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\cos\beta$

nên biểu thức đã cho trở thành: $\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta - \sin^2\beta = 0$.

Chia cả hai vế cho $\cos^2\beta$ được:

$\tan\beta + 1 - \tan^2\beta = 0$, hay $\tan^2\beta - \tan\beta - 1 = 0$.

Giải ra được $\tan\beta = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 20

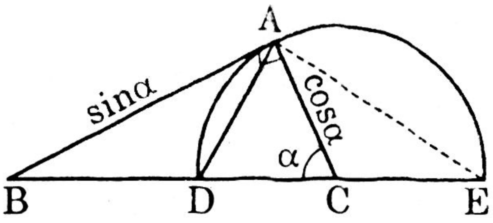
Trước tiên ta biến đổi vế trái như sau:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

Ta hãy dựng tam giác ABC có cạnh huyền BC = 1 và góc nhọn $\widehat{C} = \alpha$ (hình 1). Xét $\Delta BAD \sim \Delta BEA$ ta có:

$\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BE}{BA}$ (*)



Hình 1

Thay BA = sinα, BD = 1 − cosα,

BE = 1 + cosα vào (*) được hằng đẳng thức ở đề bài:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Bài 21

a) Ta biết rằng: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

Ở đây $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$.

(Còn có thể giải như sau:

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, nên $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$).

b) Ta có: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, nên

$\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

c) Ta có: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, nên:

$\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \arcsin 0 = 0$.

d) Đặt $t = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ta có $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (vì $\frac{\pi}{2} < t < \pi$).

Lại có: $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$ (*), nên

$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, từ đó $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vì $\frac{\pi}{2} < t < \pi$).

Thay giá trị của sint vào (*) được:

$\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 22

a) Đặt s = arcsinx, ta có x = sins $\left(\text{với } -\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}\right)$

t = arccosx ta có x = cost (với $0 < t < \pi$).

Suy ra: sins = sint hay $\sin s = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. (*)

Do $-\frac{\pi}{2} \le s + t \le \frac{3\pi}{2}$ nên (*) cho: $s = \frac{\pi}{2} - t$ hay $s + t = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

b) Ta có: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x\right) = \cot(\operatorname{arccot} x) = x$.

Do đó: $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arctan x$.

Vậy $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.

Bài 23

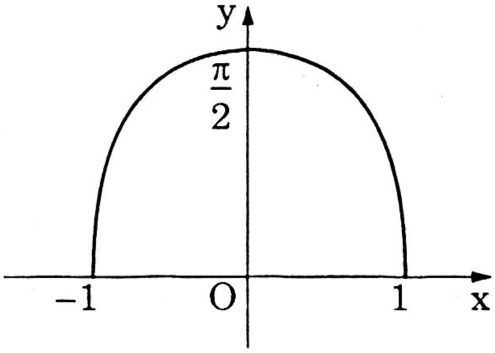
a) Miền xác định của hàm số là đoạn [−1; 1]. Hàm số này chẵn, trên đoạn [0; 1] nó nghịch biến từ $\frac{\pi}{2}$ đến 0,

trên đoạn [−1; 0] nó đồng biến từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$.

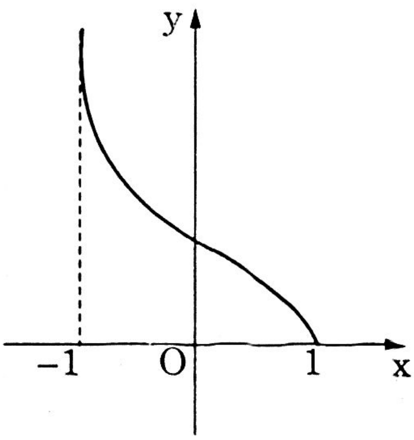
Đồ thị như ở hình 2.

b) Ta có $y = t^2$ với t = arccosx, trên đoạn [−1; 1] thì:

Hàm số t nghịch biến từ π đến 0, còn y nghịch biến từ π^2 đến 0. Đồ thị như ở hình 3.



Hình 2



Hình 3

Bài 24

Với $x > 0$ thì rõ ràng $\arctan x = \mathrm{arccot}\, x$.

Nếu $x < 0$ thì $\arctan x = -\arctan(-x)$

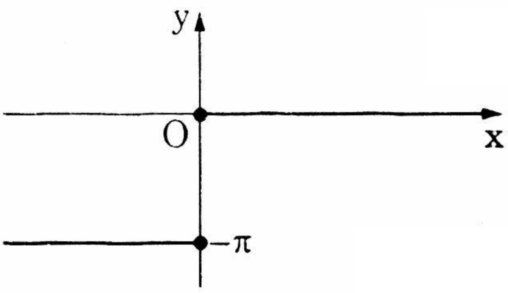
$$= -\mathrm{arccot}\frac{1}{-x} = -(\pi - \mathrm{arccot}\, x) = \mathrm{arccot}\, x - \pi.$$

Hàm số $y = \arctan x - \mathrm{arccot}\, x$ xác định với mọi giá trị của x, trừ giá trị $x = 0$ (vì với $x = 0$ thì $\mathrm{arccot}\, x$ vô nghĩa).

Theo hệ thức trên thì:

$$y = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x > 0 \\ -\pi \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Đồ thị như ở hình 4.



Hình 4

Bài 25

a) Hàm số xác định với mọi giá trị của x, tức là trong khoảng $(-\infty; +\infty)$ vì với mọi giá trị thực của x thì giá trị của $u = \sin x$ nằm trong đoạn $[-1; 1]$.

Nếu ta thay $x = \frac{\pi}{6}$ thì:

$$y = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = x$$

nhưng với $x = \frac{5\pi}{6}$ thì:

$$y = \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq x.$$

Như vậy, với mọi giá trị tùy ý x thì nói chung giá trị của y khác giá trị của x.

b) Nếu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $y = x$.

Nếu $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ thì $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và do $\sin(\pi - x) = \sin x$

nên $y = \pi - x$.

Nếu $x \in \left[\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$ thì $y = x - 2\pi$.

Nếu $x \in \left[-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ thì $y = -\pi - x$.

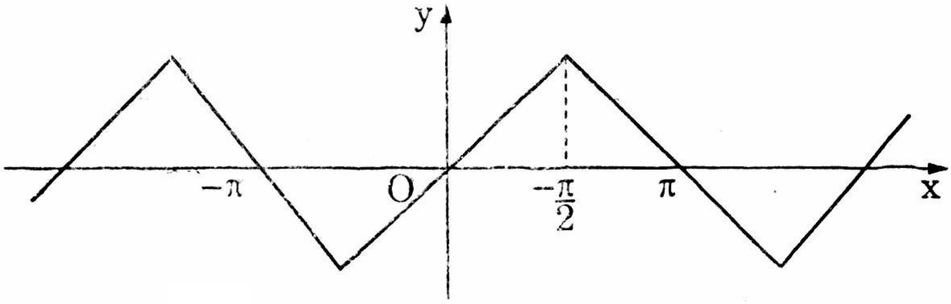
Nếu $x \in \left[-\frac{5}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$ thì $y = x + 2\pi$.

Một cách tổng quát.

Nếu $-\frac{\pi}{2} + k.2\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ thì $y = x - k.2\pi$.

Nếu $\frac{\pi}{2} + k.2\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi + k.2\pi$ thì $y = (\pi - x) + k.2\pi$.

Đồ thị hàm số như ở hình dưới đây (hình 5)



Hình 5

Bài 26

Đặt arcsinx = α. Suy ra sinα = x với $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Khi đó $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - x^2}$ và

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - (1 - x^2)}{2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} = \pm\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} = \pm\frac{|x|}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - x^2})}}.$$

Vì $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ nên ta có dấu cộng khi $x > 0$ (khi đó $\alpha > 0$) và dấu trừ khi $x < 0$ (khi đó $\alpha < 0$). Nhưng mặt khác với $x > 0$ thì $|x| = x$ và với $x < 0$ thì $|x| = -x$.

Do đó: $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{x}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - x^2})}}$.

Bài 27

Đặt $\arctan 2 = \alpha$ và $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \beta$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$.

Từ đó: $\cot\alpha = 2$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cot\beta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta} = 3$.

Như thế: $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{2\times 3 - 1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$.

Suy ra $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Nhưng do $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ nên $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, do đó chỉ có giá trị k = 0 là thích hợp.

Vậy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, tức là $\arctan 2 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$.

D. BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 28. Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $\sin y + \sin 2y + \sin 3y$ khi $y = \frac{\pi}{6}$;

b) $2\sin(45^\circ + z) + 3\cos(180^\circ - 2z) - 4\cot(90^\circ - z)$ khi $z = 45^\circ$.

Bài 29. Tìm giá trị của β để ta có các đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{\sin\beta} = \sqrt{1+\cot^2\beta}$; b) $2\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - \cos\beta$?

Bài 30. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2(2 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha)$;

b) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1$.

Bài 31.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\tan\alpha + \cot\alpha|$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của $|\sin\beta + \cos\beta|$.

Bài 32. Chứng minh các hằng đẳng thức sau:

a) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x$;

b) $\dfrac{1 - \cos^2 y}{\dfrac{1}{\cos^2 y} - 1} + \dfrac{1 - \sin^2 y}{\dfrac{1}{\sin^2 y} - 1} - (\tan y - \cot y)^2 + \dfrac{1 - \sin^2 y}{1 - \cos^2 y} = 3 - \tan^2 y.$

Bài 33. Tính

a) $\sqrt{\sin^2 \alpha(1 + \cot \alpha) + \cos^2 \alpha(1 + \tan \alpha)}$ nếu $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

b) $\dfrac{\cot^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cot^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)} + \dfrac{\cot(270^\circ - \alpha)}{1 - \tan^2(\alpha - 180^\circ)} \cdot \dfrac{\cot^2(360^\circ - \alpha) - 1}{\cot(180^\circ + \alpha)}.$

Bài 34.

a) Khử β từ $x = \tan^2 \beta$ và $y = \sin^2 \beta$.

b) Tính $\tan^4 \beta + \cot^4 \beta$ biết $\tan \beta + \cot \beta = m$.

ĐÁP SỐ

Bài 28

a) $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$; b) -2.

Bài 29

a) $\sin\beta > 0$, tức là $k.2\pi < \beta\ (2k + 1)\pi$ vì góc β phải tận cùng ở các góc phần tư I hoặc II.

b) Với mọi β.

Bài 30

a) 5 ; b) 0.

Bài 31

a) 2 ; b) $\sqrt{2}$.

Bài 33

a) $-(\sin\alpha + \cos\alpha)$; b) $1 + 1 = 2$.

Bài 34

a) $x - y = xy$; b) $m^4 - 4m^2 + 2$.

BẠN CÓ BIẾT?

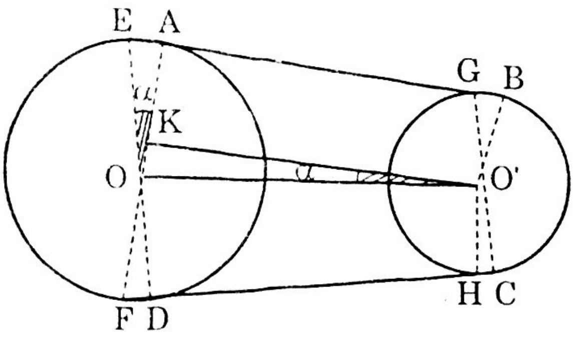
Độ dài dây cua-roa với hai ròng rọc

Có hai ròng rọc tâm O và O' bán kính R và r (với OO' = d) và một dây cua-roa có độ dài là:

$$AB + \overset{\frown}{BC} + CD + \overset{\frown}{DA}.$$

(AB, CD là độ dài của tiếp tuyến)

Để tính độ dài cua-roa ta tính riêng từng phần của nó (hình 6)



Hình 6

Xét tam giác O'KO vuông tại K ta có:

$$O'K = AB = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}, \widehat{AOE} = \widehat{BO'G} = \widehat{KO'O}.$$

Gọi $\widehat{AOE} = \alpha$ ta tính được:

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{d}.$$

Biết sinα dùng bảng số ta tính được góc α rồi tính:

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DF} = \frac{2\pi R\alpha}{360} = \frac{\pi R\alpha}{180}$$

$$\overset{\frown}{AEFD} = \pi R + \frac{\pi R\alpha}{180}.2 = \pi R + \frac{\pi R\alpha}{90}$$

$$\overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{CH} = \frac{2\pi r\alpha}{360} = \frac{\pi r\alpha}{180}$$

$$\overset{\frown}{BC} = \pi r - \frac{\pi r\alpha}{180} \times 2 = \pi r - \frac{\pi r\alpha}{90}.$$

Vậy độ dài dây cua-roa bằng:

$$2\sqrt{d^2(R-r)^2} + \pi R + \frac{\pi R\alpha}{90} + \pi R - \frac{\pi r\alpha}{90}$$

$$= 2\sqrt{d^2 - (R-r)^2} + \pi(R+r) + \frac{\pi\alpha}{90}(R-r).$$

E. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu hỏi có 3 đáp án A, B, C hãy trả lời đáp án đúng.

1. Cho góc $\alpha = \frac{2\pi}{9} + k.2\pi$. Tính góc α sao cho $|\alpha| \le 2\pi$:

A. $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ và $-\frac{8\pi}{5}$; B. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{5\pi}{3}$; C. $\frac{2\pi}{9}$ và $\frac{-16\pi}{9}$.

2. Kim giờ và kim phút hiện đang trùng nhau ở 12 giờ. Hai kim lại trùng nhau sau:

A. k giờ; B. $\frac{12k}{11}$ giờ; C. $\frac{10k}{13}$ giờ.

3. Rút gọn biểu thức sau:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

A. $\frac{1}{\sin\alpha}$; B. $\frac{3}{\cos\alpha}$; C. $\frac{2}{\sin\alpha}$.

4. Nếu x là góc nhọn và $\sin x = \frac{3}{5}$ thì biểu thức $A = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ có giá trị bằng:

A. 3; B. $\frac{31}{8}$; C. $\frac{25}{7}$.

5. Trong khoảng $(0, 2\pi)$:

a) Tích sinx.cosx có giá trị dương khi x có giá trị là:

A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hoặc $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

B. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ hoặc $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

C. $\pi < x < 2\pi$.

b) Tích tany.siny có giá trị âm khi y có giá trị là:

A. $\pi < y < 2\pi$ hoặc $0 < y < \pi$

B. $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ hoặc $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$

C. $0 < y < \frac{\pi}{2}$ hoặc $-\pi < y < \frac{\pi}{2}$.

6. Gọi α, β và γ là ba góc của một tam giác, tổng $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ có:

A. Dấu dương B. Dấu âm C. Bằng 0.

7. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $1 + \sin x$ là:

A. 1 và 3 B. 0 và 2 C. 0 và 1.

b) $2 - \cos x$ là:

A. 0 và 2 B. 1 và 2 C. 1 và 3.

8. Các biểu thức sau đây sau khi rút gọn:

a) $a^2 \sin 2\pi + 2\pi ab \cos\frac{3\pi}{2} + b^2 \tan 2\pi$ có giá trị là:

A. -1 B. 1 C. 0.

b) $m^2 \cos 2\pi - n^2 \sin\frac{3\pi}{2} + mn\cos\pi - mn\cos 0$ có giá trị là:

A. $(m-n)^2$ B. $(m+n)^2$ C. $m^2 + n^2$.

9. Cho α là một góc nhọn mà $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, biểu thức $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ có giá trị bằng:

A. 5 B. -1 C. 7.

10. Cho β là một góc tù mà $\sin\beta = \frac{1}{3}$, biểu thức $\frac{\cos\beta + \tan\beta}{\cot\beta}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{11}{24}$ B. 2 C. $\frac{10}{21}$.

11. Tính giá trị của biểu thức $\tan^2 y + \cot^2 y$ biết $\tan y + \cot y = p$.

A. $2 - p^2$ B. $p^2 - 4$ C. $p^2 - 2$.

12. Chứng tỏ rằng biểu thức $\cos^2\alpha\cot^2\alpha + 2\cos^2\alpha - \cot^2\alpha + \sin^2\alpha$ là một hằng số (không phụ thuộc α) bằng:

A. 1 B. 2 C. 3.

13. Biểu thức $2(\sin^4\beta + \cos^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta)^2 - (\sin^6\beta + \cos^6\beta)$ không phụ thuộc vào β và có giá trị không đổi bằng:

A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{2}$.

14. Rút gọn biểu thức:

$\sin 450^\circ \cos 180^\circ + \tan 405^\circ \cot 765^\circ + \cos 315^\circ \sin 405^\circ$.

A. $\frac{2}{3}$ B. -1 C. $\frac{1}{2}$.

15. Sau khi rút gọn biểu thức:

$\dfrac{\tan(270^\circ - \alpha)\sin 130^\circ \sin 270^\circ \cos 320^\circ}{\cot(180^\circ - \alpha)\cos 50^\circ \sin 220^\circ \cos 360^\circ}$ có giá trị bằng:

A. $\cot^2 50^\circ$ B. $-\cot^2 50^\circ$ C. $-\cot^2 40^\circ$.

16. Chứng tỏ biểu thức:

$\tan(90^\circ + \beta) + \tan(\beta + 270^\circ) - \tan(\beta - 450^\circ) - \tan(\beta - 90^\circ)$ là một số không đổi và bằng:

A. 2 B. 0 C. 1.

17. Rút gọn biểu thức:

$\tan 420^\circ + 2\sin 870^\circ - 2\cos 1410^\circ$.

A. 0 B. 3 C. 1.

18. Chứng tỏ biểu thức:

$\dfrac{\tan(90^\circ - \varphi)\cos(360^\circ - \varphi)\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin(90^\circ - \varphi)\cos(-\varphi)}$ không phụ thuộc vào góc "φ" và có giá trị là:

A. 1 B. 2 C. 3.

19. Giá trị của $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{1}{9}$.

20. Giá trị của $\text{arsin}\,\alpha + \arccos\alpha$ (với $-1 \le \alpha \le 1$) bằng:

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$.

Trả lời

1. Đáp án C

2. Đáp án B

3. a) Đáp án C
   b) Đáp án B

4. Đáp án C

5. a) Đáp án A
   b) Đáp án B

6. Đáp án A

7. a) Đáp án B
   b) Đáp án C

8. a) Đáp án C
   b) Đáp án A

9. Đáp án C

10. Đáp án A

11. Đáp án C

12. Đáp án A

13. Đáp án A

14. Đáp án C

15. Đáp án C

16. Đáp án B

17. Đáp án C

18. Đáp án A

19. Đáp án C

20. Đáp án A

Dạng toán 2

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Sự biến thiên và đồ thị của các hàm số lượng giác

1) Một hàm số f(x) xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có:

$$x - T \in \mathcal{D} \text{ và } x + T \in \mathcal{D}$$

$$f(x + T) = f(x).$$

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số T có tính chất trên gọi là *chu kì* của hàm số tuần hoàn f(x).

2) Hàm số y = sinx và hàm số y = cosx là các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Hàm số y = tanx và hàm số y = cotx là các hàm số tuần hoàn với chu kì π.

3) Hàm số y = sinx đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Hàm số y = cosx nghịch biến trên đoạn $[0; \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = sinx	0	↗	1	↘	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = cosx	1	↘	0	↘	−1

Hàm số y = tanx đồng biến trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$;

Hàm số y = cotx nghịch biến trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$.

x	π		$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$			$+\infty$
	0	$\nearrow$	

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$y = \cot x$	$+\infty$	$\searrow$	
			0

Công thức lượng giác

1) Công thức cộng:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}.$$

2) Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3) Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4) *Công thức tính sina, cosa, tana theo* $t = \tan\frac{a}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

5) *Công thức biến đổi tích thành tổng*

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right].$$

6) *Công thức biến đổi tổng thành tích*

Ta có: $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$

$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b.$

Đặt $a + b = \alpha$ và $a - b = \beta$ suy ra $a = \frac{\alpha+\beta}{2}, b = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Từ đó

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

B. ĐỀ BÀI

Công thức cộng

Bài 1. Tính $\cos 15^\circ$ và $\sin 15^\circ$.

Bài 2. Cho $\cos x = -\frac{1}{4}, \cos y = \frac{1}{3}$ và

$\frac{\pi}{2} < x < \pi, \frac{3}{2}\pi < y < 2\pi$, tính $\cos(x + y)$ và $\cos(x - y)$.

Bài 3. Cho $\sin a = -\frac{2}{5}, \cos b = \frac{3}{4}$ và $\pi < a < \frac{3}{2}\pi, 0 < b < \frac{\pi}{2}$,

tính $\sin(a + b)$ và $\sin(a - b)$.

Bài 4. Rút gọn:

a) $\sin(x + 30^\circ) - \sin(x - 30^\circ)$;

b) $\cos(x + 45^\circ) - \cos(x - 45^\circ)$.

Bài 5. Rút gọn:

a) $\frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{\sin(x + y) - \sin(x - y)}$;

b) $\frac{\cos(x + y) - \cos(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$.

Bài 6. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $\cos(p + q)\sin(p - q) = \sin p\cos p - \sin q\cos q$;

b) $\cos^2 m - \sin\left(\frac{\pi}{6} + m\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - m\right) = \frac{3}{4}$.

Bài 7. Tính $\tan(45^\circ + p)$. Suy ra giá trị của $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$.

Bài 8. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\tan 13\alpha - \tan 9\alpha}{\tan 13 \times \tan 9\alpha + 1}$;   b) $\frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \mathrm{tg}25^\circ \times \mathrm{tg}20^\circ}$.

Bài 9. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x + y).\sin(x - y)}{\cos^2 x.\cos^2 y}.$$

Bài 10. Chứng minh rằng biểu thức:

$$\tan x + \tan y + \tan z - \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}$$

bằng tích tanx.tany.tanz.

Công thức nhân đôi

Bài 11. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \tan 2\alpha + \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$;

b) $\tan^2(45^\circ - \beta) = \dfrac{1 - \sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta}$.

Bài 12. a) Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(45^\circ + \alpha);$$

b) Tính $\sin^2 2\beta$ nếu $\dfrac{1}{\tan^2\beta} + \dfrac{1}{\cot^2\beta} + \dfrac{1}{\sin^2\beta} + \dfrac{1}{\cos^2\beta} = 7$.

Bài 13. Rút gọn: $\dfrac{1+\tan 2\beta \tan\beta}{\cot\beta + \tan\beta}$.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu $A + B + C = \pi$ thì

$\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1$.

Bài 15. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\tan\alpha+\cot\alpha}{(1+\tan^2\alpha)+\tan\alpha} - \frac{\cot\alpha}{(1+\cot^2\alpha)+\tan^2\alpha-\cot^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.$$

Bài 16. Tính sin3a, cos3a và tan3a.

Công thức hạ bậc

Bài 17. Tìm $\sin\dfrac{\pi}{8}(= 22{,}5^\circ)$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$ và $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Bài 18. Cho $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $(270^\circ < \alpha < 360^\circ)$, tìm $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

Bài 19. Cho $\sin 2x = -\dfrac{4}{5}$ và $90^\circ < x < 135^\circ$, tìm $\sin x$, $\cos x$ và $\tan x$.

Bài 20. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Bài 21. Chứng tỏ rằng biểu thức:

$$\frac{2\cos^2 y-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right).\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+y\right)}$$

luôn bằng 1.

Bài 22. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}{\cos 2\beta}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right).$$

Bài 23. Chứng tỏ rằng $2\cos^2\beta+\cos\beta-1$ bằng tích

$$2\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Bài 24. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{1-\sin 2\beta}{1+\sin 2\beta}.$$

Công thức tính sina, cosa, tana theo $t=\tan\frac{a}{2}$.

Bài 25. Tính giá trị của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$ biết $\tan\frac{\alpha}{2}=0,8$.

Bài 26. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}$ biết $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$.

Bài 27. Cho $\tan\frac{y}{2}=4\tan\frac{x}{2}$, chứng minh rằng:

$$\tan\frac{y-x}{2}=\frac{3\sin x}{5-3\cos x}.$$

Công thức biến đổi tích thành tổng và tổng thành tích

Bài 28 Biến đổi tổng sau thành một tích:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha.$$

Bài 29. Tính tổng sau:

cosx + cos2x + cos3x + cos4x +..... +cosnx.

Bài 30. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\tan a + \tan b + \tan c - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} = \tan a \tan b \tan c\,.$$

Bài 31 Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \tan(45^{\circ} + \alpha)$;

b) $\dfrac{\sin\alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$.

Bài 32. Chứng tỏ rằng biểu thức:

$$\frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1}$$

luôn bằng 2cosx.

Bài 33. Chứng minh rằng:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \text{ nếu } \alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

Bài 34. Chứng minh rằng nếu $\cos(\alpha + \beta) = 0$ thì

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha.$$

Bài 35. Chứng minh rằng nếu $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^{\circ}$ thì

$\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \,.\, \tan 2\beta \,.\, \tan 2\gamma$.

Bài 36. Chứng minh rằng nếu $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$ thì

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} - 1 = -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Bài 37. Chứng minh hằng đẳng thức:

$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \,.\, \tan b \,.\, \tan c$

nếu $a + b + c = 0$.

Các bài toán hay khác.

Bài 38. Chứng minh tổng ba phân số dạng $\dfrac{a-b}{1+ab}, \dfrac{b-c}{1+bc}, \dfrac{c-a}{1+ac}$ bằng tích của chúng.

Bài 39. Chứng minh tích $\sin\beta\sin2\beta\sin3\beta$ không thể bằng 1 với mọi β.

Bài 40. Tính tổng: $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cos^2 4\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha$.

Bài 41. Cho $\tan\alpha = m$, $\tan\beta = n$, $\tan\gamma = p$ với m, n, p là những số dương và α, β, γ là ba góc nhọn. Tìm điều kiện cần và đủ để tổng $T = \alpha + \beta + \gamma$ là một góc nhọn.

Bài 42. Không dùng bảng hãy tính:

a) $\sin3^\circ$ và $\cos3^\circ$, b) $\sin12^\circ$ và $\cos12^\circ$.

Bài 43. Chứng tỏ biểu thức sau luôn bằng 0:

$$S = \frac{\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right).\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right)}{\cos(2\pi - \varphi)} + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).\sin(\pi - \varphi) + \cos(\pi + \varphi).\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Bài 44. Giải thích tại sao biểu thức:

$$T = \cos\left(\frac{n\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{3}{7}n\pi - \frac{3}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{7}n\pi - \frac{3}{14}\pi\right)$$

bằng 0, biết rằng n khi chia cho 7 cho số dư là một trong ba số sau 1 ; 3 ; 4.

Bài 45. Tính tích sau:

$$P = \cos\alpha.\cos2\alpha.\cos4\alpha\ldots\cos2^n\alpha.$$

Từ đó suy ra các giá trị của P:

a) Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2^{n+1}+1}$;

b) $\alpha = 1$; $\alpha = 2$.

Bài 46

Không dùng bảng hãy tính tích:

$$Q = \tan20^\circ.\tan40^\circ.\tan60^\circ.\tan80^\circ.$$

Bài 47. Tìm biểu thức để tính $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ và $\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ (xuất phát từ $\cos\dfrac{\pi}{2^2} = \sin\dfrac{\pi}{2^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

Bài 48. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{1}{\sin(m-n)\sin(m-p)}+\frac{1}{\sin(n-p)\sin(n-m)}+\frac{1}{\sin(p-m)\sin(p-n)}$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{m-n}{2}.\cos\frac{m-p}{2}.\cos\frac{n-p}{2}}.$$

Bài 49. Biến đổi tổng sau đây thành một tích:

$$S=\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c-1.$$

Bài 50. Chứng tỏ rằng tổng $T=m^2+n^2-2mn\cos\varphi$ $(m\neq n)$ có thể biến đổi thành tích $(m-n)^2.\cos^2\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{\cos^2\varphi}$.

Bài 51. Không dùng bảng hãy tính tổng:

$$M=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Bài 52. Chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$;

b) $1+\cot^2\frac{2\pi}{7}+1+\cot^2\frac{3\pi}{7}+1+\cot^2\frac{6\pi}{7}=8.$

Bài 53. Nếu tanm và tann là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2+Sx+P=0$, thì biểu thức sau tính theo S và P bằng bao nhiêu $M=\sin^2(m+n)+S\sin(m+n)\cos(m+n)+P\cos^2(m+n)$?

Bài 54. Chứng minh trong tam giác MNP ta có các hệ thức sau:

a) $\cos^2 M+\cos^2 N+\cos^2 P=1-2\cos M\cos N\cos P$;

b) $\sin^2 M+\sin^2 N+\cos^2 P=2(1+\cos M\cos N\cos P)$.

Bài 55. Chứng minh các hệ thức sau trong tam giác DEF:

a) $\sin2D+\sin2E+\sin2F=4\sin D\sin E\sin F$;

b) $\sin D-\sin E-\sin F=-4\cos\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2}$.

Bài 56. Chứng minh rằng nếu $\tan\frac{M}{2},\tan\frac{N}{2},\tan\frac{P}{2}$ lập thành một cấp số cộng thì cosM, cosN, cosP cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài 57. Chứng minh rằng trong tam giác DEF ta có hai bất đẳng thức sau:

a) $\sin^2 D + \sin^2 E + \sin^2 F \le \frac{9}{4}$;

b) $\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{E}{2} + \sin\frac{F}{2} \le \frac{3}{2}$.

Bài 58. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta}.$$

C. GỢI Ý PHƯƠNG PHÁP GIẢI – GIẢI

Bài 1. Ta có:

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\sin 15^0 = \sin(60^0 - 45^0) = \sin 60^0 \sin 45^0 - \cos 60^0 \cos 45^0$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 2. Do $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ nên $\sin x > 0$, ta có:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}, \text{ suy ra } \sin x = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Do $\frac{3}{2}\pi < y < 2\pi$ nên $\sin y < 0$, ta có :

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \text{ suy ra } \sin y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy: $\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{17}}{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{2\sqrt{34}}{12} = \frac{2\sqrt{34}-1}{12};$$

$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{17}}{4} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{12} - \frac{2\sqrt{34}}{12} = \frac{-1-2\sqrt{34}}{12}.$$

Bài 3. Do $\pi < a < \frac{3}{2}\pi$ nên $\cos a < 0$, do $0 < b < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin b > 0$.

Ta có: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 + \frac{4}{25} = \frac{29}{25}$, suy ra $\cos a = -\frac{\sqrt{29}}{5}$;

$\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, suy ra $\sin b = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Vậy: $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$$= \left(-\frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{4} + \left(-\frac{\sqrt{29}}{5}\right) \times \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{6}{20} - \frac{\sqrt{203}}{20} = \frac{-6 - \sqrt{203}}{20};$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b = -\frac{6}{20} + \frac{\sqrt{203}}{20} = \frac{-6 + \sqrt{203}}{20}.$$

Bài 4

a) $\sin(x + 30^o) - \sin(x - 30^o) = \sin x\cos 30^o + \cos x\sin 30^o -$

$-\sin x\cos 30^o + \cos x\sin 30^o = 2\cos x\sin 30^o = 2\cos x \times \frac{1}{2} = \cos x.$

b) $\cos(x + 45^o) - \cos(x - 45^o) =$

$= \cos x\cos 45^o - \sin x\sin 45^o - \cos x\cos 45^o - \sin x\sin 45^o$

$= -2\sin x\sin 45^o = -2\sin x.\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\sin x.$

Bài 5

a) $$\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y}{\sin x\cos y + \cos x\sin y - \sin x\cos y + \cos x\sin y}$$

$$= \frac{2\sin x\cos y}{2\cos x\sin y} = \tan x.\cot y.$$

b) $$\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y - \cos x\cos y - \sin x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y}$$

$$= \frac{-2\sin x\sin y}{2\cos x\cos y} = -\tan x\tan y.$$

Bài 6

a) Biến đổi vế trái:

$(\cos p\cos q - \sin p\sin q)(\sin p\cos q - \cos p\sin q) =$

$$= \cos p \sin p . \cos^2 q - \cos^2 p . \sin q \cos q - \sin^2 p . \sin q \cos q + \sin^2 q . \sin p \cos p$$

$$= \sin p \cos p(\cos^2 q + \sin^2 q) - \sin q \cos q(\sin^2 p + \cos^2 p)$$

$$= \sin p \cos p - \sin q \cos q .$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

b) Biến đổi vế trái:

$$\cos^2 m - \left[\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos m + \cos\frac{\pi}{6}\sin m\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos m - \cos\frac{\pi}{6}\sin m\right)\right]$$

$$= \cos^2 m - \left[\sin^2\frac{\pi}{6}\cos^2 m - \cos^2\frac{\pi}{6}\sin^2 m\right]$$

$$= \cos^2 m - \frac{1}{4}\cos^2 m + \frac{3}{4}\sin^2 m$$

$$= \frac{3}{4}(\cos^2 m + \sin^2 m) = \frac{3}{4}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 7. Ta có $\tan(45^\circ + p) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan p}{1 - \tan 45^\circ \tan p} = \dfrac{1 + \tan p}{1 - \tan p}$.

Suy ra: $\dfrac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Bài 8. Áp dụng các công thức về tan(a + b) và tan(a − b) ta có ngay:

a) $\dfrac{\tan 13\alpha - \tan 9\alpha}{\tan 13\alpha . \tan 9\alpha + 1} = \tan(13\alpha - 9\alpha) = \tan 4\alpha$;

b) $\dfrac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ . \tan 20^\circ} = \tan(25^\circ + 20^\circ) = \mathrm{tg}45^\circ = 1.$

Bài 9. Biến đổi vế trái:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

$$= \frac{(\sin x \cos x - \cos x \sin y)(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{\cos^2 x . \cos^2 y}$$

$$= \frac{\sin(x - y) . \sin(x + y)}{\cos^2 x . \cos^2 y}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 10. Quy đồng mẫu chung cosx. cosy. cosz, tử trở thành:

sinxcosycosz + sinycoszcosx + sinzcosxcosy − sin [(x + y) +z].

Số hạng cuối bằng.

$$-\sin(x+y)\cos z - \cos(x+y)\sin z.$$

Hai số hạng đầu bằng −sin(x + y)cosz nên tử có dạng sau:

sinzcosxcosy − cos(x + y)sinz = sinz [cosxcosy − cos(x + y)].

Thay cos(x + y) bằng giá trị của nó sẽ được tử bằng sinzsinxsiny.

Vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$\frac{\sin z \sin x \sin y}{\cos z \cos x \cos y} = \tan x.\tan y.\tan z.$$

Bài 11

a) Nhân tử và mẫu của vế trái với sinα + cosα, rồi rút gọn được vế trái bằng $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, hay

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} + \tan 2\alpha.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

b) Ta có: $\tan(45^o - \beta) = \frac{\tan 45^o - \tan\beta}{1 + \tan 45^o \tan\beta} = \frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$.

Từ đó: $\tan^2(45^o - \beta) = \frac{(\sin\beta - \cos\beta)^2}{(\sin\beta + \cos\beta)^2}$

$$= \frac{1 - 2\sin\beta\cos\beta}{1 + 2\sin\beta\cos\beta} = \frac{1 - \sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 12.

a) Ở tử của $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ ta thay bằng $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ và

sin2α = 2sinαcosα, ta được tử bằng $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Mẫu bằng $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

Chia tử và mẫu cho $\sin\alpha + \cos\alpha$, được: $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

Lại chia tiếp tử và mẫu cho $\cos\alpha$, được: $\dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$.

Theo bài 11 ta có $\tan(45^\circ + \alpha) = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$.

Vậy cuối cùng ta chứng minh được rằng:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \tan(45^\circ + \alpha).$$

b) Biểu thức đã cho có thể viết: $\cot^2\beta + \tan^2\beta + \dfrac{1}{\sin^2\beta} + \dfrac{1}{\cos^2\beta} = 7$

hay $\cos^4\beta + \sin^4\beta + 1 = 7\sin^2\beta\cos^2\beta$,

hay $(\cos^2\beta + \sin^2\beta)^2 + 1 - 2\sin^2\beta\cos^2\beta = 7\sin^2\beta\cos^2\beta$.

Từ đó: $2 = 9\sin^2\beta\cos^2\beta = \dfrac{9}{4}\sin^2 2\beta$.

Vậy $\sin^2 2\beta = \dfrac{8}{9}$.

Bài 13. Tử có thể biến đổi thành:

$$\frac{\cos 2\beta\cos\beta + \sin 2\beta\sin\beta}{\cos 2\beta\cos\beta} = \frac{\cos(2\beta - \beta)}{\cos 2\beta\cos\beta} = \frac{1}{\cos 2\beta}.$$

Mẫu có thể biến đổi thành:

$$\frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\beta}.$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$\frac{1}{\cos 2\beta} : \frac{2}{\sin 2\beta} = \frac{1}{2}\tan 2\beta.$$

Bài 14. Vế trái có thể viết:

$$\cot A\cot B + (\cot A + \cot B)\cot C.$$

Nhưng

$$\cot A + \cot B = \frac{\sin(A + B)}{\sin A\sin B},\ \cot C = \cot(\pi - (A + B)) = -\cot(A + B).$$

Do đó vế trái trở thành:

$$\cot A\cot B-\frac{\cos(A+B)}{\sin A\sin B}=\cot A\cot B-\left(\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\frac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}\right)$$

$$=\cot A.\cot B-(\cot A.\cot B-1)=1.$$

Bài 15. Biến đổi vế trái:

$$\frac{1+\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}}{(1+\tan^2\alpha)+\tan\alpha}-\frac{\cot\alpha}{(1+\cot^2\alpha)+\tan^2\alpha-\cot^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{\cot\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha}=\cos\alpha.\sin\alpha$$. Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 16. Ta có:

a) $\sin 3a=\sin(2a+a)=\sin 2a\cos a+\cos 2a\sin a$

$$=2\sin a\cos^2 a+(\cos^2 a-\sin^2 a)\sin a$$

$$=3\cos^2 a\sin a-\sin^3 a$$

$$=3(1-\sin^2 a)\sin a-\sin^3 a.$$

Vậy $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$.

b) $\cos 3a=\cos(2a+a)=\cos 2a\cos a-\sin 2a\sin a$

$$=(2\cos^2 a-1)\cos a-2\sin^2 a\cos a$$

$$=2\cos^3 a-\cos a-2\cos a(1-\cos^2 a).$$

Vậy $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$.

c) $$\tan 3a=\tan(2a+a)=\frac{\tan 2a+\tan a}{1-\tan 2a\tan a}$$

$$=\frac{\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}+\tan a}{1-\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.\tan a}=\frac{2\tan a+\tan a-\tan^3 a}{1-\tan^2 a-2\tan^2 a}$$

Vậy $\tan 3a=\dfrac{3\tan a-\tan^3 a}{1-2\tan^2 a}$.

Bài 17. Coi $\frac{\pi}{8}$ là một nửa của $\frac{\pi}{4}$ và biết rằng $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\cos\frac{\pi}{4}\right.$ và $\sin\frac{\pi}{4}$ đều dương và góc $\left.\frac{\pi}{8}\text{ nhọn}\right)$.

Vậy $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ và $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

Bài 18. Ta có $135^\circ<\frac{\alpha}{2}<180^\circ$ nên $\tan\frac{\alpha}{2}<0$.

$$\text{Do }\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{9}\text{ nên }\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}.$$

Bài 19. Do $90^\circ<x<130^\circ$ nên sinx > 0, cosx < 0 và tanx < 0, ta có:

$\cos^2 2x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$, từ đó $\cos 2x=\pm\frac{3}{5}$;

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{4}{5}$, do đó $\sin x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{1}{5}$, do đó $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\tan x=\frac{2\sqrt{5}}{5}:\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-2$.

Bài 20. Theo công thức $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$, vế trái có thể viết:

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}$$

Khai triển tử theo công thức cos(a – b) – cos(a + b) ta được:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 21. Ta có tử $2\cos^2 y-1=\cos 2y$, còn mẫu có thể biến đổi như sau:

$$2\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]=2\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right).\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-y\right).$$

Áp dụng công thức $\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}$, ta được:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2y\right)=\cos 2y.$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành: $\dfrac{\cos 2y}{\cos 2y}=1.$

Bài 22. Biến đổi vế trái:

$$\frac{1-\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\frac{(\cos\beta-\sin\beta)^2}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}=\frac{\cos\beta-\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta}$$

$=\dfrac{\cot\beta-1}{\cot\beta+1}=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)$. Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 23. Thay $2\cos^2\beta=1+\cos 2\beta$ ta được:

$$1+\cos 2\beta+\cos\beta-1=\cos 2\beta+\cos\beta=2\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Bài 24. Ta có thể viết vế trái:

$$\tan^2(45^\circ-\beta)=\frac{2\sin^2(45^\circ-\beta)}{2\cos^2(45^\circ-\beta)}$$

$=\dfrac{1-\cos 2(45^\circ-\beta)}{1+\cos 2(45^\circ-\beta)}=\dfrac{1-\sin 2\beta}{1+\sin 2\beta}$. Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 25. Đặt $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}=0,8=\dfrac{4}{5}$, ta có :

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\times\frac{4}{5}}{1+\frac{16}{25}}=\frac{8}{5}\times\frac{25}{41}=\frac{40}{41};$$

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\frac{16}{25}}{1+\frac{16}{25}}=\frac{9}{25}\times\frac{25}{41}=\frac{9}{41}.$$

Từ đó: $\tan\alpha = \frac{40}{9}$.

Bài 26. Đặt $\tan\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{3}{2}\times\frac{16}{25} = \frac{24}{25};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{16}\times\frac{16}{25} = \frac{7}{25}.$$

Vậy vế trái bằng: $\dfrac{3\times\frac{24}{25}+\frac{7}{25}}{\frac{7}{25}-3\times\frac{24}{25}} = -\dfrac{79}{65}$.

Bài 27. Đặt $\tan\frac{x}{2} = t$, ta có ngay $\tan\frac{y}{2} = 4t$.

Vế trái: $\tan\dfrac{y-x}{2} = \dfrac{\tan\frac{y}{2}-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{y}{2}.\tan\frac{x}{2}} = \dfrac{4t-t}{1+4t^2} = \dfrac{3t}{1+4t^2}$.

Do $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ nên vế phải bằng:

$$\frac{3\sin x}{5-3\cos x} = \frac{6t}{1+t^2}:\left(5-\frac{t^2}{1+t^2}\right)$$

$= \dfrac{6t}{2+8t^2} = \dfrac{3t}{1+4t^2}$. Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 28. Ta có: $(\sin\alpha + \sin3\alpha) + \sin2\alpha =$

$= 2\sin2\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha\,(\sin2\alpha + \sin\alpha)$

$= 2\cos\alpha.2\sin\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 4\cos\alpha.\cos\dfrac{\alpha}{2}.\sin\dfrac{3\alpha}{2}$.

Bài 29. Áp dụng công thức:

$$\sin kx\cos mx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+k)x - \sin(m-k)x\right]$$

Cho $k = \frac{1}{2}$; $m = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$; ta sẽ tìm được:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Nhưng $\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x$, nên tổng

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Bài 30. Vế trái có thể biến đổi như sau:

$$\frac{\sin a\cos b\cos c + \sin b\cos a\cos c + \sin c\cos a\cos b - \sin\left[(a+b)+c\right]}{\cos a\cos b\cos c} =$$

$$= \frac{\sin(a+b)\cos c + \sin c\cos a\cos b - \sin(a+b)\cos c - \cos(a+b)\sin c}{\cos a\cos b\cos c} =$$

$$= \frac{(\cos a\cos b - \cos a\cos b + \sin a\sin b)\sin c}{\cos a\cos b\cos c}$$

$$= \frac{\sin a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c} = \tan a.\tan b.\tan c.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 31.

a) Ta có: $\cos\alpha + \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\alpha$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Tương tự: $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Vậy vế trái trở thành: $\cot\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Vế trái đúng bằng vế phải.

b) Thay sinα bằng $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ và cosα bằng $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ rồi áp dụng các công thức về tổng hai cosin và hiệu hai cosin sẽ đi đến kết quả.

Bài 32. Biến đổi tử ta có:

$(1+\cos 2x)+(\cos x+\cos 3x)=2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x.$

Biến đổi mẫu được: cosx + cos2x.

Vậy biểu thức đã cho trở thành 2cosx.

Bài 33. Ta có:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$ Vì thế:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Bài 34. Chỉ cần nhân hai vế của đẳng thức cos(α + β) = 0 với 2sinβ, rồi áp dụng công thức

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

để được kết quả.

Bài 35. Ta có vế trái bằng:

$$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}+\frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}=\frac{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\gamma+\cos 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\gamma}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}=$$

$$=\frac{\sin 2\gamma(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\gamma)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}$$

$$=\frac{\sin 2\gamma(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha\sin 2\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}$$

$=\tan 2\alpha.\tan 2\beta.\tan 2\gamma.$ Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 36. Biến đổi vế trái:

$$\frac{1-\cos\alpha}{2}+\frac{1-\cos\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}-1=\sin^2\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$=\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$\left(\text{do } \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\right)$. Vế trái đúng bằng vế phải.

Bài 37. Ta có: $\tan(a+b)=-\tan c$, hay $\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=-\tan c$.

Từ đó: $\tan a+\tan b+\tan c=\tan a.\tan b.\tan c$.

Hằng đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 38. Đặt $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$, $c=\tan\gamma$. Thế thì:

$$\frac{a-b}{1+ab}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha-\beta).$$

Tương tự: $\frac{b-c}{1+bc}=\tan(\beta-\gamma)$; $\frac{c-a}{1+ac}=\tan(\gamma-\alpha)$.

Như vậy, tổng ba phân số đã cho tương đương với tổng

$$\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha).$$

nhưng tổng ba tang khi tổng ba góc bằng 0 (bài 37) thì bằng tích ba tang. Đó là điều phải chứng minh.

Bài 39. Ta có

$$1=\frac{1}{2}\sin 2\beta(\cos 2\beta-\cos 4\beta)=\frac{1}{2}\sin 2\beta\cos 2\beta-\frac{1}{2}\sin 2\beta\cos 4\beta$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4\beta-\frac{1}{4}\sin 6\beta+\frac{1}{4}\sin 2\beta.$$

Đẳng thức này không thể xảy ra vì:

$$\left|\frac{1}{4}\sin 4\beta-\frac{1}{4}\sin 6\beta+\frac{1}{4}\sin 2\beta\right|\le\frac{1}{4}\{|\sin 4\beta|+|\sin 6\beta|+|\sin 2\beta|\}\le\frac{3}{4}.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài 40. Ta có:

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

$$2\cos^2 2\alpha = 1 + \cos 4\alpha$$

....

$$\underline{2\cos^2 n\alpha = 1 + \cos 2n\alpha}$$

$$2(\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + ... + \cos^2 n\alpha) = n + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + ... + \cos 2n\alpha).$$

Từ đó: $\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + ... + \cos^2 n\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha.\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$.

Bài 41. Theo bài ra ta có: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Ta xét các trường hợp sau:

a) Tổng $S = \alpha + \beta + \gamma$ hoặc thuộc góc phần tư 1 tức là $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$, góc S là góc nhọn nên cosS > 0.

b) Tổng S thuộc góc phần tư II tức là $\frac{\pi}{2} \le S < \frac{3}{2}\pi$, khi đó cos S ≤ 0.

Kết hợp hai đều kiện cosS > 0 và cosS ≤ 0 ta thấy rằng điều kiện cần và đủ là cos S > 0, tức là:

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma$$

$$- \tan\alpha\tan\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma[1 - (mn + np + mp)] > 0,$$

hay mn + np + mp < 1.

Bài 42

a) Ta biết rằng: $3^o = 18^o - 15^o$ mà $\sin 18^o = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \cos 18^o = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ (xem bài 11 trang 158, sách "Các dạng toán cơ bản và nâng cao Đại số 10" của tác giả) và $\sin 15^o = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos 15^o = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (xem bài 1 dạng toán 2: Công thức lượng giác của cuốn sách này).

Ta có:

$$\sin 3^o = \sin\frac{\pi}{60} = \sin 18^o \cos 15^o - \cos 18^o \sin 15^o$$

$$= \left(\frac{\sqrt{15} - 1}{4} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})] \approx 0,05234.$$

Tương tự:

$$\cos 3^o = \frac{1}{16}[\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})] \approx 0,99863.$$

b) Ta có $12^o = 30^o - 18^o$ nên:

$$\cos 12^o = \cos\frac{\pi}{15} = \frac{1}{8}[\sqrt{3}\times\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)] \approx 0,97815;$$

$$\sin 12^o = \frac{1}{8}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\times(\sqrt{5}-1)] \approx 0,20791.$$

Bài 43. Ta có:

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right).\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = -\cos\varphi;$$

$$\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi; \ \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi;$$

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi; \qquad \cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi;$$

$$\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\cos\varphi.$$

Thay các giá trị này vào biểu thức đã cho được:

$$S = -1 + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 0.$$

Bài 44. Số n có thể viết: n = 7k + r. Các số hạng của tổng đã cho có dạng:

$$\cos\left(\frac{mn\pi}{7} - \alpha\right), \text{trong đó } m = 1;3;5 \text{ và } \alpha = \frac{13}{14}\pi \text{ hoặc } \alpha = \frac{3}{14}\pi.$$

Thay n = 7k + r, được:

$$\cos\left(\frac{(7k+r)m}{7} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{rm\alpha}{7} + km\pi - \alpha\right) = (-1)^{km}.\cos\left(\frac{rm\pi}{7} - \alpha\right).$$

Vì m là số lẻ nên với tất cả ba số hạng ta đều có $(-1)^{km} = (-1)^1$, do đó chỉ cần chứng minh rằng:

$$\cos\left(\frac{r\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{3r\pi}{7} - \frac{3}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{5r\pi}{7} - \frac{3}{14}\pi\right) = 0$$

với r = 1 ; 3 ; 4.

Với r = 1 thì ta biến đổi mỗi số hạng như sau:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) = \cos\left(-\frac{11}{14}\pi\right) = \cos\frac{11}{14}\pi = -\cos\frac{3}{14}\pi;$$

$$\cos\left(\frac{3}{7}\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = \cos\frac{3}{14}\pi;$$

$$\cos\left(\frac{5}{7}\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Rõ ràng tổng của ba số này bằng 0.

Với r = 3 và r = 4 ta cũng có kết quả là tổng ba số bằng 0.

Bài 45. Ta có:

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

$2\sin 4\alpha\cos 4\alpha = \sin 8\alpha$

………………………………

$2\sin 2^n\alpha\cos 2^n\alpha = \sin 2^{n+1}\alpha$

Nhân từng vế các đẳng thức trên rồi rút gọn được:

$2^{n+1}\sin\alpha.P = \sin 2^{n+1}\alpha$, từ đó $P = \dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

a) Từ đó nếu $\alpha = \dfrac{\pi}{2^{n+1}+1}$ thì:

$$\sin 2^{n+1}\alpha = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2^{n+1}+1}\right) = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}+1} = \sin\alpha .$$

Vậy:

$$P = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}+1}.\cos\frac{2\pi}{2^{n+1}+1}.\cos\frac{4\pi}{2^{n+1}+1}\ldots\cos\frac{2^n.\pi}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

b) Đặc biệt với n = 1, ta được hệ thức:

$$P = \cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

Với n = 2 ta được hệ thức:

$$P = \cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8} \text{ hay}$$

$$\cos 20^o.\cos 40^o.\cos 80^o = \frac{1}{8}.$$

Bài 46. Theo bài 45 ta có tích $\cos 20^o.\cos 40^o.\cos 80^o = \dfrac{1}{8}$ nên tích đã cho:

$P = \dfrac{\sin 20^o.\sin 40^o.\sin 60^o.\sin 80^o}{\cos 20^o.\cos 40^o.\cos 60^o.\cos 80^o}$ có mẫu bằng $\dfrac{1}{16}$.

Để tính tử ta tính $\sin 20^o.\sin 40^o = \dfrac{1}{2}(\cos 20^o - \cos 60^o)$, từ đó:

$$\frac{1}{2}(\cos 20^o - \cos 60^o)\times\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80^o = \frac{\sqrt{3}}{4}[\cos 20^o\cos 80^o - \frac{1}{2}\sin 80^0]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{\sin 100^o + \sin 60^o}{2} - \frac{1}{2}\sin 80^o\right] = \frac{3}{16}.$$

Lưu ý $\sin 100^o = \sin 80^o$, cuối cùng ta được: P = 3.

Bài 47. Ta biết rằng $\cos\dfrac{\pi}{2^2} = \sin\dfrac{\pi}{2^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Như thế:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\quad \sin\frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};\quad \sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Để cho gọn ta đặt $R_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....\sqrt{2}}}}$ (n = 1 ; 2 ; 3; ....) và được:

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{R_2}{2};\quad \cos\frac{\pi}{2^4} = \frac{R_3}{2};\quad \sin\frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2-R_1}}{2};\quad \sin\frac{\pi}{2^4} = \frac{\sqrt{2-R_2}}{2}$$

Áp dụng phương pháp quy nạp hoàn toàn và đặt $\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{R_{n-1}}{2}$,

$\sin\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{\sqrt{2-R_{n-2}}}{2}$, ta sẽ có:

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} = \frac{\sqrt{2+R_{n-1}}}{2} = \frac{R_n}{2}.$$

Tương tự: $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-R_{n-1}}}{2}$, tức là công thức đúng với cung $\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Bài 48. Biến đổi vế trái bằng cách quy đồng mẫu:

$$\frac{1}{\sin(m-n)\sin(m-p)}.[\sin(n-p)-\sin(m-p)+\sin(m-n)].$$

Biểu thức trong dấu [ ] có thể biến đổi thành một tích như sau:

$$\sin(n-p)-\sin(m-p)+\sin(m-n)$$

$$=2\cos\frac{m+n-2p}{2}\sin\frac{n-m}{2}+\sin(m-n)$$

$$=2\sin\frac{n-m}{2}\left[\cos\frac{m+n-2p}{2}-\cos\frac{n-m}{2}\right]$$

$$=-4\sin\frac{n-m}{2}.\sin\frac{n-p}{2}.\sin\frac{m-p}{2}.$$

Áp dụng công thức $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ để biến đổi các thừa số ở mẫu, rồi rút gọn vế trái ta sẽ được vế phải.

Bài 49. Ta có:

a) $\cos^2 b+\cos^2 c-1=\cos^2 b-\sin^2 c$

$$=\frac{1}{2}[\cos 2b+\cos 2c]=\cos(b+c)\cos(b-c).$$

b) $\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c=\cos^2 a+\cos a[\cos(b+c)+\cos(b-c)]$.

Vậy tổng

$$S=\cos(b+c)\cos(b-c)+\cos^2 a+\cos a[\cos(b+c)+\cos(b-c)]$$

$$=[\cos a+\cos(b+c)].[\cos a+\cos(b-c)]\text{, hay}$$

$$S=4\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{-a+b+c}{2}.\cos\frac{a+b-c}{2}.\cos\frac{a-b+c}{2}.$$

Bài 50. Vì $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$, nên ta có:

$$T=(m^2+n^2)\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)-2mn\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=(m+n)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(m-n)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$= (m-n)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[1+\left(\frac{m+n}{m-n}.\tan\frac{\varphi}{2}\right)^2\right].$$

Đặt $\tan\gamma = \frac{m+n}{m-n}\tan\frac{\varphi}{2}$, ta sẽ được:

$$T = (m-n)^2.\cos^2\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{\cos^2 y}.$$

Bài 51. Áp dụng các công thức:

$2\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ và $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$, ta có thể viết tổng đã cho như sau:

$$M = \left(\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - 2\left(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4} + 1 + \cos\frac{3\pi}{4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1 + \cos\frac{5\pi}{4} + 1 + \cos\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

hay $M = \frac{1}{4}\left[4 + \frac{1}{2}\left(4 + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$$= \frac{1}{4}\left[4 + \frac{1}{2}\left(4 + 2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{4} + 2\cos\pi\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 + 2 + \cos\pi\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Cuối cùng $M = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}$.

Bài 52

a) Nhân vế trái với $2\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$ ta có:

$$\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right).2\sin\frac{\pi}{7}=$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}$$

$=\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}$. Suy ra vế trái $=\frac{1}{2}$. Vế trái đúng bằng vế phải.

b) Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\cot^2\frac{2\pi}{7}-1\right)+\left(\cot^2\frac{3\pi}{7}-1\right)+\left(\cot^2\frac{6\pi}{7}-1\right)=2\ (*)$$

Nhưng $\cot^2\alpha-1=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha.\cos\alpha}{\sin 2\alpha.\sin\alpha}=2\cot 2\alpha.\cot\alpha$,

nên (*) lại có thể viết:

$\cot\frac{4\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{6\pi}{7}\cot\frac{3\pi}{7}+\cot\frac{12\pi}{7}\cot\frac{6\pi}{7}=1$, hay

$\cot\frac{4\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{6\pi}{7}=1$.

Đẳng thức cuối này đúng dựa vào nhận xét sau:

"Nếu a + b + c = π thì cotacotb + cotbcotc + cotccota = 1"

(Thật thế, từ a + b + c = π ta có cot(a + b) = −cotc hay

$\frac{\cot a\cot b-1}{\cot a+\cot b}=-\cot c$, suy ra điều nhận xét trên).

Bài 53. Theo định lý Viet ta có ngay:

$$\tan m+\tan n=-S;\ \tan m.\tan n=P.$$

Từ đó $\tan(m+n)=\frac{\tan m+\tan n}{1-\tan m.\tan n}=\frac{-S}{1-P}=\frac{S}{P-1}$.

Vậy $M=\cos^2(m+n)[\tan^2(m+n)+S\tan(m+n)+P]$.

Suy ra M = P.

Bài 54. Do tổng ba góc của tam giác bằng 180° hay M+N+P = 180°

nên $\cos(N+P)=\cos(180^\circ-M)=-\cos M$.

Suy ra: $-\cos M = \cos N\cos P - \sin N\sin P$.

Bình phương hai vế của đẳng thức này được:

$\cos^2 M = \cos^2 N\cos^2 P - 2\cos N\cos P\sin N\sin P + \sin^2 N\sin^2 P$.(*)

Do $\sin^2 N = 1 - \cos^2 N$ và $\sin^2 P = 1 - \cos^2 P$, nên ta có thể viết tích

$\sin^2 N.\sin^2 P = (1 - \cos^2 N)(1 - \cos^2 P) = 1 - \cos^2 N - \cos^2 P + \cos^2 N\cos$

Thay vào (*) được:

$$\cos^2 M = \cos^2 N\cos^2 P + 1 - \cos^2 N - \cos^2 P + \cos^2 N\cos^2 P$$
$$- 2\sin N\sin P.\cos N\cos P$$

hay $\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P = 1 + 2\cos N\cos P\cos(N + P)$.

Thay cos (N + P) = −cos M ta sẽ được biểu thức cần chứng minh.

b) Chỉ việc thay hệ thức ở câu a): $\cos^2 M = 1 - \sin^2 M$, $\cos^2 N = 1 - \sin^2 N$ và $\cos^2 P = 1 - \sin^2 P$, ta sẽ được biểu thức cần chứng minh.

Bài 55

a) Do $D + E + F = 180^\circ$ nên sin(D + E) = sinF và cos(D + E) = −cosF.

Ta có:

$\sin 2D + \sin 2E + \sin 2F = 2\sin(D + E)\cos(D - E) + 2\sin F\cos F$

$= 2\sin F\cos(D - E) + 2\sin F\cos F = 2\sin F\,[\cos(D - E) + \cos F]$

$= 2\sin F\,[\cos(D - E) - \cos(D + E)] = -4\sin F\sin D\sin(-E)$.

Suy ra: $\sin 2D + \sin 2E + \sin 2F = 4\sin D\sin E\sin F$.

b) Ta có $\sin D - \sin E = 2\sin\frac{D - E}{2}\cos\frac{D + E}{2} = 2\sin\frac{D - E}{2}\sin F$

Lại có $\sin F = 2\sin\frac{F}{2}\cos\frac{F}{2}$, nên:

$$\sin D - \sin E - \sin F = 2\sin\frac{D - E}{2}\sin\frac{F}{2} - 2\sin\frac{F}{2}\cos\frac{F}{2}$$
$$= 2\sin\frac{F}{2}\left(\sin\frac{D - E}{2} - \sin\frac{D + E}{2}\right)$$
$$= -4\cos\frac{D}{2}\sin\frac{F}{2}\sin\frac{F}{2}.$$

Bài 56. Theo tính chất của cấp số cộng $u_1 + u_3 = 2u_2$, ta có ngay

$\tan\frac{M}{2} + \tan\frac{P}{2} = 2\tan\frac{N}{2}$, suy ra $\dfrac{\cos\frac{N}{2}}{\cos\frac{M}{2}\cos\frac{P}{2}} = 2.\dfrac{\sin\frac{N}{2}}{\cos\frac{N}{2}}$.

Thế thì: $1 + \cos N = 2\sin\frac{N}{2}\left(\cos\frac{M+P}{2} + \cos\frac{M-P}{2}\right)$,

hay 1 + cosN = 1 − cosN + cosM + cosP.

Từ đó: cosM + cosP = 2cosN, tức là $u_1 + u_3 = 2u_2$.

Vậy cosM, cosN, cosP lập thành một cấp số cộng.

Bài 57

a) Bất đẳng thức đã cho có thể:

$$\frac{1-\cos 2D}{2} + \frac{1-\cos 2E}{2} + 1 - \cos^2 F \le \frac{9}{4}\text{, hay}$$

$$-\cos(D+E).\cos(D-E) - \cos^2 F \le \frac{1}{4};$$

$$4\cos^2 F - 4\cos F\cos(D-E) + 1 \ge 0\text{, hay}$$

$$[2\cos F - \cos(D-E)]^2 + \sin^2(D-E) \ge 0 \text{ luôn đúng.}$$

b) Vế trái của bất đẳng thức có thể viết:

$$\frac{\dfrac{\sin\frac{D}{2}+\sin\frac{E}{2}}{2} + \dfrac{\sin\frac{F}{2}+\sin\frac{\pi}{6}}{2}}{2} \le \frac{\sin\dfrac{D+E}{2} + \sin\dfrac{\frac{F}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}}{2}$$

$$\le \sin\frac{\frac{D+E+F}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}.$$

Suy ra $\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{E}{2} + \sin\frac{F}{2} + \sin\frac{\pi}{6} \le 4\sin\frac{\pi}{6}$.

Vậy $\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{E}{2} + \sin\frac{F}{2} \le \frac{3}{2}$.

Dấu = xảy ra kvck tam giác DEF là tam giác đều.

Bài 58. Biến đổi vế trái :

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{(1-\cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$= \frac{1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$= \frac{1-\cos(\alpha-\beta).[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$= \frac{1-\cos^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

D. BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 59. Chứng tỏ rằng biểu thức:

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \text{ bằng } \tan\alpha.$$

Bài 60. Chứng tỏ rằng biểu thức:

$$\frac{1-\cos(\beta+60^\circ)}{\sin(\beta+60^\circ)} \text{ bằng } \tan\left(30^\circ + \frac{\beta}{2}\right).$$

Bài 61. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Bài 62. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\cos^3\beta\sin\beta - \sin^3\beta\cos\beta = \frac{\sin 4\beta}{4}.$$

Bài 63. Rút gọn

$$\frac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Bài 64. Rút gọn

$$\frac{\cos^3\beta - \sin^3\beta}{1 + \sin\beta.\cos\beta}.$$

Bài 65. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x}{\sin 3x + 2\sin 5x + \sin 7x} = \frac{\sin 3x}{\sin 5x}.$$

Bài 66. Chứng minh rằng nếu cosx + cosy + cosz = 0 thì ta có đẳng thức:

$$\cos3x + \cos3y + \cos3z = 12.\cos x\cos y\cos z.$$

Bài 67. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(\alpha,\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta).$$

ĐÁP SỐ:

Bài 63: $\dfrac{\cos(60^\circ - \alpha)}{\cos(60^\circ + \alpha)}$.

Bài 64: $\cos\beta - \sin\beta$.

Bài 65: Viết vế trái dưới dạng $\dfrac{(\sin x + \sin 5x) + 2\sin 3x}{(\sin 3x + \sin 7x) + 2\sin 5x}$.

Bài 66: Biến đổi vế trái thành $4\cos^3 x + 4\cos^3 y + 4\cos^3 z -$

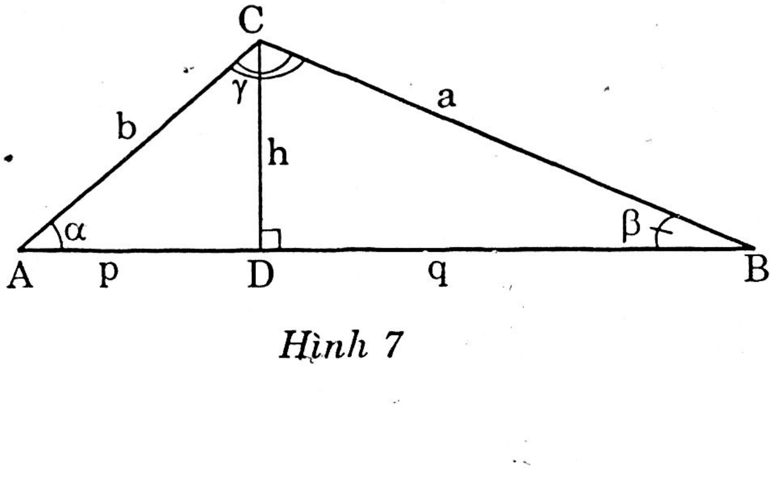
$-3(\cos x + \cos y + \cos z)$ rồi lưu ý cosx + cosy + cosz = 0.

Bài 67: Giá trị lớn nhất là 1, giá trị nhỏ nhất cũng là 1.

BẠN CÓ BIẾT?

Tam giác nào cũng là tam giác vuông

Cho ABC là một tam giác bất kỳ có 3 cạnh là a, b, c và ba góc là α, β, γ còn đường cao h chia cạnh đối c thành hai đoạn p và q (hình 7).



Hình 7

Trên hình vẽ ta có ngay:

$$\sin\alpha = \frac{h}{a}, \cos\alpha = \frac{p}{b},$$

$$\sin\beta = \frac{h}{a}, \cos\beta = \frac{q}{a}.$$

Từ đó ta có: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, hay

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h}{b}\times\frac{q}{a} + \frac{p}{b}\times\frac{h}{a} = \frac{h(p+q)}{ab} = \frac{hc}{ab} \quad (*)$$

Ta lại có:

$a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác). Thay vào công thức (*) ta được:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h\sin\gamma}{2R\sin\alpha\sin\beta}.$$

Với điều lưu ý là $h = b\sin\alpha = 2R\sin\alpha\sin\beta$, ta sẽ có:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$. Từ đó: $\alpha + \beta = \gamma$.

Vậy điều kiện này chỉ xảy ra khi tam giác ABC vuông tại C.

Sai ở đâu?

Giải thích

Sai lầm do từ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ chuyển sang $\alpha + \beta = \gamma$.

Nếu hai góc bằng nhau thì sin của chúng bằng nhau, nhưng điều ngược lại không đúng.

Với góc $\alpha + \beta$ và góc γ có thể xảy ra:

a) $\alpha + \beta = \gamma$, ta có tam giác vuông.

b) $\alpha+\beta = 180^o - \gamma$, trong trường hợp này $\alpha+\beta+\gamma = 180^o$ và không có cơ sở nào để suy ra tam giác là vuông.

c) $\alpha+\beta = 360^o + \gamma$, điều này không thể xảy ra vì hiệu của tổng hai góc của một tam giác và góc thứ ba của nó không thể bằng 360^o.

E. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Biết rằng hai góc α và β đều tù và $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$. Tính giá trị của:

a) $\sin(\alpha+\beta)$.

A. $-\frac{45}{52}$ B. $-\frac{56}{65}$. C. $-\frac{55}{66}$.

b) $\cos(\alpha - \beta)$

A. $\frac{57}{58}$ B. $\frac{65}{68}$ C. $\frac{63}{65}$.

2. Góc nhọn φ có sin bằng $\frac{15}{17}$. Cosin của góc bù với nó có giá trị là:

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{3}$.

3. Biểu thức $\frac{\cos a \cos b - \cos(a+b)}{\cos(a-b) - \sin a \sin b}$ sau khi rút gọn được:

A. 2tanatanb B. $\frac{1}{2}\tan a \tan b$ C. tanatanb.

4. Sau khi rút gọn biểu thức $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$ có giá trị là:

A. tanφ B. cotφ C. 1 + tanφ

5. Biểu thức $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ là một số không đổi và bằng:

A. $-\frac{3}{2}$ B –2 C. 1,5.

6. Chứng tỏ rằng biểu thức $\cos^2(m+y) + \cos^2 y - 2\cos m \cos y \cos(m+y)$ không phụ thuộc y và có giá trị là:

A. $\cos^2 m$ B. $\sin^2 m$ C. $\tan^2 m$.

7. Chứng tỏ rằng trong tam giác ABC biểu thức $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C$ là một hằng số và bằng:

A. 3 B. 2 C. 1.

8. Cho $\tan x = -\frac{2}{3}$ và $\tan y = \frac{1}{2}$, giá trị của cot(x ± y) bằng:

A. –8 và $-\frac{4}{7}$ B. –6 và $-\frac{2}{5}$ C. = –4 và $-\frac{1}{2}$.

9. Cho tanu = 0,5, sinv = 0,6 tính tan(u + v) biết rằng v là góc nhọn.

A. 1 B. 2 C. 4.

10. Biểu thức $\tan a \tan b + (\tan a + \tan b)\cot(a+b)$ là một hằng số và bằng:

A. 3 B. 2 C. 1.

11. Tang của ba góc nhọn x, y, z theo thứ tự bằng $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ và $\frac{1}{8}$. Tổng của chúng có giá trị bằng:

A. 45° B. 90° C. 60°.

12. Cho $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$, giá trị của $\sin 2\alpha$ bằng:

A. $\frac{14}{15}$ B. 1 C. $\frac{24}{25}$.

13. Rút gọn biểu thức $\cos^4\varphi - \sin^4\varphi$

A. $\cos 2\varphi$ B. $\cos^2\varphi$ C. $\sin^2\varphi$.

14. Biểu thức $\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^4 x + \sin^4 x$ bằng bao nhiêu?

A. cos2x B. cos3x C. cos4x.

15. Biểu thức $\frac{1+\sin 2y - \cos 2y}{1+\sin 2y + \cos 2y}$ với $y = \frac{7}{6}\pi$ có giá trị là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

16. Biến đổi biểu thức $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$ thành một tích:

A. $3\sin(\alpha-\beta)$ B. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ C. $2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

17. Biểu thức $1 - 2\cos\varphi + \cos 2\varphi$ có thể viết thành một tích như sau:

A. $-4\cos\varphi\sin^2\frac{\varphi}{2}$ B. $2\cos\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$ C. $-\cos\varphi\sin^2\varphi$.

18. Chứng tỏ tích $\cos 36° \cdot \cos 72°$ bằng phân số sau:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$.

19. Tích $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{8}$ có thể viết thành tổng sau:

A. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{15}\right)$

B. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{40}-\cos\frac{13\pi}{40}\right)$

C. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{40}+\cos\frac{13\pi}{40}\right)$.

20. Sau khi rút gọn biểu thức $4\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\alpha+\pi}{3}\sin\frac{\pi-\alpha}{3}$ có giá trị bằng:

A. $\sin\alpha$ B. $\sin 2\alpha$ C. $\sin\frac{\alpha}{4}$

Trả lời

1. a) Đáp án B; b) Đáp án C

2. Đáp án A

3. Đáp án C

4. Đáp án A

5. Đáp án C

6. Đáp án B

7. Đáp án C

8. Đáp án A

9. Đáp án B

10. Đáp án C

11. Đáp án A

12. Đáp án C

13. Đáp án A

14. Đáp án C

15. Đáp án B

16. Đáp án B

17. Đáp án A

18. Đáp án C

19. Đáp án B

20. Đáp án A

Dạng toán 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình sinx = a có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k.2\pi \text{ và } x = \pi - \alpha + k.2\pi \quad (k \in Z)$$

(hay $x = \alpha + k.360^o$ và $x = 180^o - \alpha + k.360^o$).

b) Phương trình cosx = a có các nghiệm là:

$$x = \pm\alpha + k.2\pi \quad (k \in Z)$$

(hay $x = \pm\alpha + k.360^o$).

c) Phương trình tanx = a có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k.\pi \quad (k \in Z)$$

(hay $x = \alpha + k.180^o$).

d) Phương trình cotx = a có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k.\pi \quad (k \in Z)$$

(hay $x = \alpha + k.180^o$)

Một số phương trình lượng giác thường gặp

1) Phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Cách giải là đặt hàm số lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ nếu có, rồi giải phương trình theo ẩn phụ đó.

2) Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Dạng asinx + bcosx = c (a, b, c ∈ R và a ≠ 0, b ≠ 0).

Cách giải thứ nhất là chia hai vế của phương trình cho a rồi đặt $\frac{b}{a} = \tan\alpha$, dẫn tới phương trình cơ bản $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$.

Cách giải thứ hai là chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, dẫn tới phương trình cơ bản $\sin(x + \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3) Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx.

Dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ $(a, b, c \in R)$.

Cách giải là chia hai vế cho $\cos^2 x$ $\left(\text{với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, dẫn tới việc giải phương trình $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ và cuối cùng thay trực tiếp $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vào phương trình đã cho để xem nó có phải là nghiệm của phương trình hay không.

4) Phương trình đối xứng với sinx và cosx

Dạng a (sinx + cosx) + bsinxcosx = c (a, b, c ∈ R).

Cách giải là đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \leq \sqrt{2}$

và $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$, dẫn tới việc giải phương trình:

$bt^2 + 2at - (b + 2c) = 0$ và chọn nghiệm t thỏa mãn điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$.

Lưu ý: Với những phương trình lượng giác khác cần phải sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đưa về các phương trình đã xét (không có một phương pháp tổng quát nào để giải được mọi phương trình lượng giác) như: sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng, biến đổi tổng thành tích, công thức hạ bậc, v.v...

B. ĐỀ BÀI

Phương trình lượng giác cơ bản

Bài 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3\sin x = 2\cos^2 x$; b) $\tan x^2 + 1 = 0$.

Bài 2. Giải:

a) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$; b) sin6x = sin4x ;

c) tanx = tan2x ; d) sin3x = cos2x.

Bài 3. Giải:

a) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \tan x = 0$; b) tan2x – cot3x = 0.

Bài 4. Giải:

a) $5\sin x - \sin^5 x = 0$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Bài 5. Giải:

a) $\sin(x - 60^\circ) = \cos(x + 30^\circ)$;

b) $\cos 4x = -2\cos^2 x$.

Phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Bài 6. Giải phương trình:

a) $\cos 2x - \sin^2 x = 0$; b) $3\tan x + 5 = 2(\tan x + 1)$.

Bài 7. Giải:

a) $5 - 7\sin x = 2\cos^2 x$;

b) $2\cos 2x - 3\cos x + 1 = 0$.

Bài 8. Giải:

a) $\sin 2x = \tan x \quad (0 \le x \le \pi)$;

b) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$.

Bài 9. Giải:

a) $\sin^4 x + \sin^2 x = 2$;

b) $16\cos^4 x - 2\cos^2 x = 5$.

Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Bài 10. Giải:

a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x - 1 = 0$;

b) $\sin x + \cos x = 1$.

Bài 11. Giải:

a) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{5} = 0$;

b) $2\sin x + \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$.

Bài 12. Giải:

a) $\sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2} - \sin 3x$;

b) $5\cos 2x = 12\sin 2x + 13$.

Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx

Bài 13. Giải:

a) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$;

b) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1$.

Bài 14. Giải:

a) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

b) $2\sin^3 x = \cos x$.

Bài 15. Giải:

a) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;

b) $9\sin^2 x - 15\sin 2x = 25(1 - \cos^2 x)$

Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx

Bài 16. Giải:

a) $\sin 2x = 12(\sin x + \cos x - 1)$;

b) $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \tan x + \cot x$.

Bài 17. Giải:

a) $3(\sin x + \cos x) - 2\sin 2x = 0$;

b) $\sin x + \cos x = 1 + 2\sin x\cos x$.

Những phương trình lượng giác khác

Bài 18. Giải:

a) $\sin 6x + \sin 4x = 0$;

b) $\sin x - \cos 2x = 0$.

Bài 19. Giải:

a) $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$;

b) $4\sin x + 6\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Bài 20. Giải:

a) $\sin x + \cos x = 1 - \sin 2x$;

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2}\sin x \cos x$.

Bài 21. Giải:

a) $\sin x.\sin 2x.\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$;

b) $\tan\frac{3}{5}x.\cot\frac{5}{3}x = 1 - \frac{1}{\cos\frac{3}{5}x}.\frac{1}{\sin\frac{5}{3}x}$.

Bài 22. Giải:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;

b) $\sin^3 x.\cos x - \cos^3 x.\sin x = \frac{1}{4}$.

Bài 23. Giải:

a) $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$;

b) $5\sin 2x - 5\cos x = \tan x + 5$.

Bài 24. Giải:

a) $\sin 2x + \cos 2x = -1$;

b) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$.

Bài 25. Giải:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

b) $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

Bài 26. Giải:

a) $2\sin^3 x + \cos^2 2x = \sin x$;

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Bài 27. Giải.

a) $8\sin x\cos 3x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$;

b) $\sin^2 x^2 + \sin^2 2x^2 = \sin^2 3x^2 + \sin^2 4x^2$.

Bài 28. Giải.

a) $16^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{4}$;

b) $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

Bài 29. Giải:

a) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$;

b) $\cot^2 x = \dfrac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

Bài 30. Giải:

a) $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \dfrac{1}{4}$;

b) $\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin 2x$.

Bài 31. Giải:

a) $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$;

b) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 5 + \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right)$.

Bài 32. Giải:

a) $\tan\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan y \tan\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4\cos^2 y}{\tan\dfrac{y}{2} - \cot\dfrac{y}{2}}$;

b) $\cos\pi\dfrac{y}{31} . \cos 2\pi\dfrac{y}{31} . \cos 4\pi\dfrac{y}{31} . \cos 8\pi\dfrac{y}{31} . \cos 16\pi\dfrac{y}{31} = \dfrac{1}{32}$.

Bài 33. Giải:

a) $\sin^4\dfrac{y}{3} + \cos^4\dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{8}$;

b) $\sin^5 y - \cos^5 y = \dfrac{1}{\cos y} - \dfrac{1}{\sin y}$.

Bài 34. Giải:

a) $32\cos^6 y - \cos 6y = 1$;

b) $\sin^8 y + \cos^8 y = \dfrac{17}{32}$.

Bài 35. Giải:

a) $\sin^3 y + \sin^3 2y + \sin^3 3y = (\sin y + \sin 2y + \sin 3y)^2$;

b) $\sin^{10} y + \cos^{10} y = \dfrac{29}{16}\cos^4 2y$;

Bài 36. Giải:

a) $\sin^4 y + \cos^4 y = \cos 4y$;

b) $\sin^4 y + \sin^4(y + 45^\circ) + \sin^4(y - 45^\circ) = \dfrac{9}{8}$.

Bài 37. Giải:

a) $\cos^4 y + \sin^4 y - 2\sin 2y + \dfrac{3}{4}\sin^2 2y = 0$;

b) $(\cos y)^{\sin^2 y - \frac{3}{2}\sin y + \frac{1}{2}} = 1$.

Bài 38. Giải bất phương trình:

a) $\sin y - \sqrt{3}\cos y > \sqrt{2}$ (với $0 \le y \le 2\pi$);

b) $\dfrac{\tan^2 y - 2}{\tan^2 y - 1} < \dfrac{1}{2}$.

Bài 39. Giải bất phương trình:

a) $\dfrac{\sin 2y - \cos 2y - 1}{\sin 2y + \cos 2y - 1} > 0$;

b) $m^{\sin y} > m^{\cos y} (m > 0)$.

Bài 40. Giải bất phương trình:

a) $\sin\left(\dfrac{3}{2}y + \dfrac{\pi}{12}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

b) $\dfrac{\sin^2 y - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin y + \cos y)} > 0$.

Hệ phương trình lượng giác

Bài 41

a) Tìm tất cả nghiệm của hệ $\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ \sin(x - y) = 0 \end{cases}$

thỏa mãn điều kiện: $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$.

b) Giải hệ $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x.\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Bài 42. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \tan y + \dfrac{1}{\tan y} = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right); \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y) \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$

Bài 43. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \sin x.\sin y = \dfrac{3}{4} \\ \tan x.\tan y = 3\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Bài 44. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{4} \\ x + y = 75^\circ. \end{cases}$

Bài 45. Giải hệ

a) $\begin{cases} \tan x + \cot x = 2\sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ \tan y + \cot y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right); \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y \\ \tan x = \sqrt{3}\tan y. \end{cases}$

Bài 46. Tìm tất cả giá trị của p để hệ

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = p^2 + 1 \\ \cos x \sin 2y = p \end{cases}$$

có nghiệm và giải hệ đó.

Bài 47. Tìm $\cos(\alpha + \beta)$ biết rằng α và β thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = m \\ \cos\alpha + \cos\beta = n \end{cases}$$

và $m^2 + n^2 \neq 0$.

Bài 48. Với giá trị nào của φ thì hệ

$$\begin{cases} x - y = \varphi \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \end{cases}$$

có nghiệm? Tìm nghiệm đó.

Bài 49. Khử x và y từ hệ

$$\begin{cases} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1 \\ a\cos^2 y + b\sin^2 y = 1 \\ a\tan y = b\tan y \end{cases}$$

biết rằng hệ có nghiệm và $a \neq b$.

Bài 50. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sin y - \cos y \\ 2\sin 2x = \dfrac{3}{2} + \sin 2y. \end{cases}$

Bài 51. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$

Bài 52

a) Giải hệ: $\begin{cases} 2^{\sin\alpha + \cos\beta} = 1 \\ 16^{\sin^2\alpha + \cos^2\beta} = 4. \end{cases}$

b) Giải hệ: $\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}$

Biết rằng $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ và α, β, γ đều không âm.

C. GỢI Ý PHƯƠNG PHÁP GIẢI – GIẢI

Bài 1

a) Phương trình có thể viết:

$3\sin x = 2(1-\sin^2 x)$ hay $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

Giải ra được $\sin x = \frac{1}{2}$, từ đó $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$,

còn nghiệm sinx = –2 (loại).

b) Ta có: $\tan x^2 = -1$; $\tan x^2 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đó: $x^2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Ta phải có $-\frac{\pi}{4} + k\pi \geq 0$, suy ra $k \geq 1$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \pm\sqrt{\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi}.$$

Bài 2

a) Ta có: $\sin x + (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$, hay $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$.

Giải ra được: $\sin x = -\frac{1}{2}$, từ đó $x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$, còn nghiệm $\sin x = \frac{3}{2}$ (loại)

b) Điều kiện cần và đủ để sinx = siny là phải thỏa mãn một trong hai đẳng thức:

$$x - y = k.2\pi,\ x + y = (2k+1)\pi.$$

Ta được: $\left[\begin{array}{l} 6x - 4x = k.2\pi \\ 6x + 4x = (2k+1)\pi. \end{array}\right.$

Từ đó nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1 = k\pi\ ;\ x_2 = (2k+1)\frac{\pi}{10}.$$

c) Điều kiện cần và đủ để tanx = tany và cotx = coty là phải thỏa mãn đẳng thức:

$$x - y = k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\pi$.

d) Ta có: $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$. Dựa vào câu (b) ta tìm được:

$$3x + \frac{\pi}{2} - 2x = (2k+1)\pi, \text{ hay } 3x - \frac{\pi}{2} + 2x = k.2\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ x_2 = (4k+1)\frac{\pi}{10}.$$

Bài 3

a) Ta có: $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. Dựa vào câu (c) của bài 2 ta tìm được:

$$x - \frac{\pi}{3} + x = k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = (3k+1)\frac{\pi}{6}$.

b) Ta có: $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$. Dựa vào câu (c) của bài 2 ta tìm được:

$$2x - \frac{\pi}{2} + 3x = k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$.

Bài 4

a) Đặt sinx làm thừa số chung ta có:

$$\sin x(5 - \sin^4 x) = 0.$$

Do $5 - \sin^4 \neq 0$ nên ta có ngay sinx = 0. Từ đó x = kπ.

b) Ta biến đổi vế trái như sau:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)$$

$$= \sin 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Thay giá trị này vào vế trái và rút gọn biểu thức có được sẽ có:

$$\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \text{hay } \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Giải ra được: $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi$, hay $x=\frac{\pi}{2}+k.2\pi$.

Bài 5

a) Vế phải có thể biến đổi như sau:

$\sin[90^o-(x+30^o)]=\sin(60^o-x)=-\sin(x-60^o)$.

Do đó phương trình có dạng:

$\sin(x-60^o)=-\sin(x-60^o)$, hay $\sin(x-60^o)=0$.

Từ đó: $x-60^o=180^o.k$. Vậy $x=(3k+1)60^o$.

b) Ta viết phương trình như sau: $\cos 4x+2\cos^2 x=0$

Do $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ nên vế trái bằng:

$(1+\cos 4x)+\cos 2x=2\cos^2 2x+\cos 2x$.

Ta được phương trình: $\cos 2x\,(2\cos 2x+1)=0$.

Từ đó:
- $\cos 2x=0$, $x_1=\pm 45^o+180^o.k$
- $2\cos 2x+1=0$, $x_2=\pm 60^o+180^o.k$.

Bài 6

a) Thay $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, phương trình đã cho trở thành:

$$\cos 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}=0 \text{ hay } 3\cos 2x=1;$$

$$\cos 2x=\frac{1}{3}\approx\cos 70^o32'.$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x\approx\pm 35^o16'+k.180^o.$$

b) Khai triển vế phải và rút gọn được:

$$\tan x=-3\approx\tan(-71^o34')$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x\approx -71^o34'+k.180^o.$$

Bài 7

a) Thay $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ rồi rút gọn phương trình được:

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0.$$

Đặt sinx = y với $-1 \le y \le 1$, ta có phương trình bậc hai:

$$2y^2 - 7y + 3 = 0$$

mà nghiệm là $y_1 = \frac{1}{2}$ và $y_2 = 3$ (loại).

Giải phương trình cơ bản $\sin x = \frac{1}{2}$ được:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \text{ và } x_2 = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi.$$

b) Thay $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ vào phương trình rồi rút gọn được:

$$4\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0.$$

Giải ra được cosx = 1 và $\cos x = -\frac{1}{4}$.

Phương trình cosx = 1 cho $x_1 = k.360^\circ$.

Phương trình $\cos x = -\frac{1}{4}$ cho $-\frac{1}{4} \approx -\cos 75^\circ 31'$. Từ đó:

$$\cos x \approx \cos 104^\circ 29', x_2 \approx \pm 104^\circ 29' + k.360^\circ.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = k.360^\circ, x_2 = \pm 104^\circ 29' + k.360^\circ.$$

Bài 8

a) Tính sin2x theo tanx ta được phương trình: $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \tan x$,

hay $\tan x(\tan^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$ tanx(tanx + 1)(tanx − 1) = 0.

Với điều kiện $0 \le x \le \pi$, ta có:

- tanx = 0 có nghiệm là x = 0 và x = π;
- tanx = − 1 có nghiệm là $x = \frac{3\pi}{4}$;
- tanx = 1 có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho với $0 \le x \le \pi$ có nghiệm là:

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$; $x_3 = \frac{3\pi}{4}$ và $x_4 = \pi$.

b) Đặt $\tan^2 x = y > 0$, ta có $y + \frac{1}{y} = 2$,

hay $y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y-1)^2 = 0$. Từ đó:

$y = 1$ hay $\tan^2 x = 1$; $\tan x = \pm 1$.

- $\tan x = 1$ có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$;
- $\tan x = -1$ có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 9

a) Đặt $\sin^2 x = y$ với $0 \le y \le 1$ ta có phương trình:

$y^2 + y - 2 = 0$ mà nghiệm là $y_1 = 1, y_2 = -2$ (loại).

Với $\sin^2 x = 1$ thì $\sin x = \pm 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) Đặt $\cos^3 x = z$ với $0 \le z < 1$ ta có phương trình:

$16z^2 - 2z - 5 = 0$ mà nghiệm là $z_1 = \frac{5}{8}, z_2 = -\frac{1}{2}$(loại)

Với $\cos^2 x = \frac{5}{8}$ ta có : $\cos x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}79$.

- $\cos x \approx 0{,}79 \approx \cos 37^\circ 45'$ nên $x \approx \pm 37^\circ 45' + k.360^\circ$.
- $\cos x \approx -0{,}79 \approx \cos(180^\circ - 37^\circ 45')$ nên $x \approx \pm 142^\circ 15' + k.360^\circ$.

Bài 10

a) Thay $\sqrt{3}$ bằng $\cot 30^\circ$, phương trình đã cho có thể viết:

$\sin x + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}.\cos x = 1$, hay

$\sin x \sin 30^\circ + \cos x \cos 30^\circ = \sin 30^\circ \Rightarrow \cos(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}$.

Từ đó $x - 30^\circ = \pm 60^\circ + k.360^\circ$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$x_1 = 90^\circ + k.360 = (4k+1)90^\circ; x_2 = -30^\circ + k.360^\circ = (2k-1)30^\circ$.

b) Vế trái có thể viết dưới dạng tích $\sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)$. Ta được phương trình:

$$\cos(x - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải ra được: $x - 45^\circ = -45^\circ + k.360^\circ$ và $x - 45^\circ = 45^\circ + k.360^\circ$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$x_1 = k.360^\circ$ và $x_2 = 90^\circ + k.360^\circ$.

Bài 11

a) Đặt $\tan\frac{x}{4} = t$ thì $\sin\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Phương trình đã cho trở thành.

$\sqrt{3} \times \frac{2t}{1+t^2} - \sqrt{2} \times \frac{1-t^2}{1+t^2} = -5$, hay $2\sqrt{3}t - \sqrt{2} + \sqrt{2}t^2 = -\sqrt{5} - \sqrt{5}t^2$

$\Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{5})t^2 + 2\sqrt{3}t + (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0.$

Giải ra được: $t_{1,2} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \times \sqrt{3}}{3} \approx \pm 0,4745.$

Gọi $\tan\alpha \approx 0,4745$, ta có $\tan\frac{x}{4} = \tan(-\alpha)$.

Vậy nghiệm của phương trình là :

$x = -4\alpha + 4k.180^\circ$ hay $x \approx -101^\circ 32' + 4k.180^\circ$.

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}}$ ta sẽ đưa phương trình về dạng $\cos(x - \varphi) = \cos\alpha$ để giải:

$$x - \varphi = \pm\alpha + k.2\pi,\ x = \pm\alpha + \varphi + k.2\pi.$$

Bài 12

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$, hay $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$. Từ đó:

$3x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi$. Vậy nghiệm của phương trình là:

$x_1 = \frac{5\pi}{36} + k.\frac{2\pi}{3}$ và $x_2 = -\frac{\pi}{36} + k.\frac{2\pi}{3}$.

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{5}{13}\cos 2x - \frac{12}{13}\sin 2x = 1.$$

Gọi α là góc nhọn mà $\cos\alpha = \frac{5}{13}, \sin\alpha = \frac{12}{13}$, ta có $\alpha \approx 67^\circ 23'$.

Phương trình trở thành:

$\cos(2x + \alpha) = 1$, từ đó $x = -\frac{\alpha}{2} + k.180^\circ$ hay $x \approx -33^\circ 42' + k.180^\circ$

Bài 13

a) Thay sin2x = 2sinxcosx rồi chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, được:

$$3 - \tan^2 x - 2\tan x = 0.$$

Giải ra được tanx = 1 và tanx = −3 = tanα.

Từ đó: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = -\alpha + k\pi$.

b) Thay $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ rồi chia hai vế cho $\cos^2 x$, được:

$$\tan^3 x + \sqrt{3}\tan x = 0.$$

Giải ra được tanx = 0 và $\tan x = -\sqrt{3}$.

Phương trình có nghiệm là: $x_1 = k\pi$; $x_2 = (3k - 1)\frac{\pi}{3}$.

Bài 14

a) Chia hai vế cho cosx ≠ 0, được: $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$.

Giải ra được tanx = 1 và tanx = 2 = tanα.

Từ đó: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = \alpha + k\pi$.

b) Thay $\cos x = \cos x(\sin^2 x + \cos^2 x)$ ta được phương trình:

$$2\sin^3 x = \cos x \sin^2 x + \cos^3 x.$$

Với cosx = 0, phương trình vô nghiệm, nên chia hai vế cho $\cos^3 x$ và đặt tanx = t ta được: $2t^3 - t^2 - 1 = 0$, mà một nghiệm là t = 1. Phân tích vế trái ra thừa số:

$$(t-1)(2t^2 + t + 1) = 0.$$

Do $2t^2 + t + 1 > 0$ với mọi t nên phương trình đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất là tanx = 1, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 15

a) Vì cosx ≠ 0 nên chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$2\tan^2 x + 3 - 5\tan x$, hay $2\tan^2 x - 5\tan x + 3 = 0$.

Giải ra được tanx = 1 và $\tan x = \frac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$x_1 = 45^\circ + k.180^\circ$, $x_2 \approx 56^\circ 18' + k.180^\circ$.

b) Vì cosx ≠ 0 nên chia hai vế cho $\cos^2 x$, ta được:

$8\tan^2 x + 15\tan x = 0$, hay $\tan x(8\tan x + 15) = 0$.

- tanx = 0 có nghiệm là $x = k.180^\circ$.
- $\tan x = -\frac{15}{8}$ có nghiệm là $x = -61^\circ 55' + k.180^\circ$.

Bài 16

a) Đặt sinx + cosx = y với $|y| \le \sqrt{2}$ ta được phương trình:

$1 + 2\sin x \cos x = y^2$, hay $y^2 - 1 = 12(y-1)$; suy ra:

$y^2 - 12y + 11 = 0$ mà nghiệm là $y_1 = 11$(loại), $y_2 = 1$.

Như thế: sinx + cosx = 1. Từ đó:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1;\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{\pi}{4}-x=\pm\frac{\pi}{4}+k.2\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1=k.2\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+k.2\pi.$$

b) Phương trình có thể viết:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2\sin x\cos x},\text{ hay}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin 2x}\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\sin 2x=1 \qquad (*)$$

Do $|\sin\alpha|\le 1$ nên (*) trở thành:

hoặc $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ và $\sin 2x=-1$

hoặc $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ và $\sin 2x=1$.

Hai phương trình đầu không có nghiệm chung, hai phương trình cuối có nghiệm chung là $x=\frac{\pi}{4}+k.2\pi$ và đó cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 17

a) Đặt sinx + cosx = t, phương trình đã cho trở thành:

$3t=2(t^2-1)$, hay $2t^2-3t-2=0$ mà nghiệm là $t_1=2; t_2=-\frac{1}{2}$.

Do $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ nên ta có:

- $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\cos\alpha$.

Từ đó: $x-\frac{\pi}{4}=\pm\alpha+k.2\pi$; $x_1=\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k.2\pi$.

- $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}=\cos\beta$.

Từ đó: $x = -\frac{\pi}{4} = \pm\beta + k.2\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \beta + k.2\pi$.

b) Đặt t = sinx + cosx, ta có $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$. Do đó phương trình đã cho trở thành:

$$t = t^2 \text{ hay } t^2 - t = t(t-1) = 0.$$

- $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$. Suy ra

  $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{2} + k.2\pi$, vậy : $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$.

- $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$. Suy ra

  $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi$, vậy:

  $x_3 = k.2\pi$; $x_4 = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$.

Bài 18

a) Áp dụng công thức về tổng các sin ta được:

$$2\sin 5x\cos x = 0.$$

Từ đó: hoặc sin5x = 0 , hoặc cosx = 0.

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{5}k \text{ và } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$$

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \text{ hay}$$

$$2\sin\frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Phương trình này tương đương với tập hợp hai phương trình

$$\sin\frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ và } \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Giải phương trình thứ nhất: $\frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = k\pi$, từ đó $x = \frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{3}$.

Giải phương trình thứ hai: $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\pi}{2}+l\pi$, từ đó $x=-\frac{\pi}{2}-l.2\pi$.

Ta nhận thấy rằng nghiệm của phương trình thứ hai chứa trong nghiệm của phương trình thứ nhất nên đáp số sẽ là:

$$x=\frac{\pi}{6}+k.\frac{2\pi}{3}, k\in Z.$$

Bài 19

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\sin x(1+\cos x)-(1-\cos x)=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow (1+\cos x)(\sin x-1)=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow (\sin x-1)(1+\cos x)=1-\sin^2 x$$

$$\Rightarrow -(1-\sin x)(1+\cos x)=(1-\sin x)(1+\sin x).$$

Từ đó được:

- $\sin x = 1$, vậy $x=\frac{\pi}{2}+k.2\pi$;
- $-(1-\cos x)=1+\sin x$; $-1-\cos x=1+\sin x$ hay $\sin x+\cos x=-2$.

Phương trình cuối này vô nghiệm, vì nếu bình phương hai vế sẽ được

$$1 + \sin 2x = 4 \text{ hay } \sin 2x = 3, \text{ vô lí!}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k.2\pi$.

b) Ta có: $4\sin x\cos x+6\cos^2 x=1$ (vì $\cos x = 0$ không phải là nghiệm).

Thay $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, ta có:

$\sin^2 x-4\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$, hay $\tan^2 x-4\tan x-5=0$.

Giải ra được: $\tan x = -1$ và $\tan x = 5$.

Nghiệm của $\tan x = -1$ là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Đặt $5 = \tan\alpha$ thì $\tan x = \tan\alpha$ mà nghiệm là $x = \alpha + k\pi$.

Bài 20

a) Đặt $t = \sin x + \cos x$ và áp dụng công thức:

$$\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1,$$

ta được:

$t = 1 - (t^2 - 1)$ hay $t^2 + t - 2 = 0$ mà nghiệm là $t_1 = 1; t_2 = -2$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với tập hợp hai phương trình: $\sin x + \cos x = 1$ và $\sin x + \cos x = -2$.

Giải phương trình thứ nhất được nghiệm là $x = ((-1)^k - 1)\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Phương trình thứ hai vô nghiệm vì $|-2| > \sqrt{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = ((-1)^k - 1)\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

b) Ta biến đổi biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ như sau:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{4}\sin 2x.$$

Đặt $\sin 2x = t$ ta được $2t^2 + 7t - 4 = 0$ mà nghiệm là $t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = -4$.

Phương trình $\sin 2x = \frac{1}{2}$ có nghiệm là $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k.\frac{\pi}{2}$.

Phương trình thứ hai vô nghiệm.

Bài 21

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x$$

hay $\sin 2x\,(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0$; suy ra:

$\sin 2x\,(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$ hay $\sin 2x \,.\, \cos 4x = 0$.

Với $\sin 2x = 0$ ta có $x_1 = k.\frac{\pi}{2}$;

Với $\cos 4x = 0$ ta có $4x = (2k + 1) \times \frac{\pi}{2}$, $x_2 = (2k + 1) \times \frac{\pi}{8}$.

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{\sin\frac{3}{5}x.\cos\frac{5}{3}x}{\cos\frac{3}{5}x.\sin\frac{5}{3}x} = 1 - \frac{1}{\cos\frac{3}{5}x.\sin\frac{5}{3}x}$$

hay $\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x - \sin\frac{3}{5}x\cos\frac{5}{3}x = 1;$

suy ra $\sin\left(\frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x\right) = 1;\ \sin\frac{16}{15}x = 1.$

Từ đó: $\frac{16}{15}x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi;\ \frac{16}{15}x = \frac{4k+1}{2}.\pi$

Vậy $x = \frac{15}{32}(4k+1).\pi$.

Bài 22

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$\sin 2x + 2\sin 2x\cos x = \cos x + 2\cos^2 x$, hay

$\sin 2x\ (1 + 2\cos x) = \cos x\ (1 + 2\cos x)$

$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(2\sin x\cos x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x).\cos x.(2\sin x - 1) = 0.$

Từ đó:

- $1 + 2\cos x = 0;\ \cos x = -\frac{1}{2};\ x_1 = \pm\frac{2}{3}\pi + k.2\pi;$
- $\cos x = 0;\ x_2 = \frac{2k+1}{2}.\pi;$
- $2\sin x - 1 = 0;\ \sin x = \frac{1}{2};\ x_3 = (-1)^k.\frac{\pi}{6} + k\pi.$

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$, hay

$\frac{1}{2}\sin 2x.(-\cos 2x) = \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4}.$

Từ đó: $\sin 4x = -1;\ 4x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi = \frac{4k-1}{2}.\pi$

Vậy $x = \frac{4k-1}{8}\pi$.

Bài 23

a) Áp dụng các công thức $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ và $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$, phương trình đã cho có thể viết:

$$6 \times \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} - (1 + \cos 2x) = \cos 2x .$$

Đặt cos2x = t, ta được phương trình $\dfrac{2t^2 + 9t - 5}{1 + t} = 0$ từ đó có:

$t_1 = \dfrac{1}{2}; t_2 = -5$. Như thế:

- $\cos 2x = \dfrac{1}{2}; x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.
- Phương trình cos2x = –5 vô nghiệm.

b) Đặt t = tanx, ta có:

$$\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2},\ \cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Do đó phương trình đã cho có thể viết:

$5 \times \dfrac{2t}{1 + t^2} - 5 \times \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = t + 5$, hay sau khi biến đổi sẽ được phương trình: $t^3 - 9t + 10 = 0$, hay $(t - 2)(t^2 + 2t - 5) = 0$.

Giải ra được: $t_1 = 2; t_2 = \sqrt{6} - 1; t_3 = -\sqrt{6} - 1$.

Đặt 2 = tanα, $\sqrt{6} - 1 = \tan\beta, -\sqrt{6} - 1 = \tan\gamma$, tả được các nghiệm sau đây của phương trình đã cho:

- $\tan x = \tan\alpha;\ x = \alpha + k\pi;$
- $\tan x = \tan\beta;\ x = \beta + l\pi;$
- $\tan x = \tan\gamma;\ x = \gamma + m\pi$.

Bài 24

a) Ta cũng đặt tanx = t như trên phương trình đã cho có thể viết

$$\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = -1 \ (*)$$

Ở đây khác với bài trên, giá trị $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ không phải là nghiệm của phương trình (*) nên phương trình đã cho sin2x + cos2x = −1 không tương đương với phương trình (*).

Do đó nếu ta xét giá trị $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì mọi nghiệm của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện này là nghiệm của phương trình (*) và ngược lại.

Giải phương trình (*) ta được:

$$\frac{2(1+t)}{1+t^2} = 0, \text{suy ra } \tan x = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$.

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{\sin(x+2x)}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0\text{, hay}$$

$$\sin 3x.\frac{\cos 3x - \cos x.\cos 2x}{\cos x.\cos 2x.\cos 3x} = 0\text{, hay}$$

$$\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;\ \sin x \sin 2x \sin 3x = 0.$$

Từ đó:

- $\sin x = 0$, $x_1 = k\pi$;
- $\sin 2x = 0$, $2x = k\pi$, $x_2 = \frac{k\pi}{2}$;
- $\sin 3x = 0$, $3x = k\pi$, $x_3 = \frac{k\pi}{3}$.

Nhưng với k = 3n thì $x_3 = n\pi = x_1$. Ngoài ra với k = 2n thì x_2 cũng có giá trị như x_3 với k = 3n. Nếu để ý rằng $x = \frac{2k+1}{2}.\pi$ không thể là nghiệm của phương trình thì tất cả nghiệm của phương trình đã cho đều chứa trong công thức $x = \frac{k\pi}{3}$.

Bài 25

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2}\text{, hay}$$

cos2x + cos4x = cos6x + cos8x ; 2cos3x .cosx = 2cos7xcosx ;

cosx (cos3x – cos7x) = 0 ; 2cosxsin2xsin5x = 0. Từ đó:

- sin5x = 0 ; $5x = k\pi$; $x_1 = \frac{k\pi}{5}$;
- sin2x = 0 ; $2x = k\pi$; $x_2 = \frac{k\pi}{2}$;
- cosx = 0 ; $x_3 = \frac{2k+1}{2}.\pi$.

Nhưng với k = 2n + 1 thì $x_2 = \frac{2n+1}{2}.\pi = x_3$. Ngoài ra với k = 2n thì x_2 có cùng giá trị với x_1 khi k = 5n.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1 = \frac{2k+1}{10}.\pi \text{ và } x_2 = \frac{2k+1}{4}.\pi.$$

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} + 2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} - 2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} = \frac{5}{8}, \text{ hay}$$

$$\left(\sin^2\frac{x}{3} + \cos^2\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{2}{3}x = \frac{5}{8};$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{2}{3}x = \frac{5}{8}; \ \sin^2\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}. \text{ Từ đó:}$$

$$\sin\frac{2}{3}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \ \frac{2}{3}x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; \ \frac{2}{3}x = \frac{3k \pm 1}{3}.\pi.$$

Vậy nghiệm là $x = \frac{3k \pm 1}{2}.\pi$

Bài 26

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$(2\sin^3 x - \sin x) + \cos^2 2x = 0$

hay $\sin x(2\sin^2 x - 1) + \cos^2 2x = 0$.

Áp dụng công thức $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, ta được:

$-\sin x\cos 2x + \cos^2 2x = 0$; $\cos 2x(\cos 2x - \sin x) = 0$. Từ đó:

- cos2x = 0 ; $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \times \frac{\pi}{2}$;

$\cos 2x - \sin x = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + k \times \frac{2\pi}{3}$.

b) Vế trái có thể biến đổi như sau:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x).$$

Vế phải có thể viết:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)$$
$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x).$$

Như vậy, phương trình đã cho trở thành:

$(\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sin x\cos x\right) = 0$. Từ đó:

- $\sin x + \cos x = 0$; $\tan x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$;
- Phương trình thứ hai $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sin x\cos x = 0$ hay $\sin 2x = 2 - \sqrt{2}$.

Đặt $2 - \sqrt{2} = \sin\alpha$, ta có $\sin 2x = \sin\alpha$. Vậy:

$$\left[\begin{array}{ll} 2x = \alpha + k.2\pi\ ; & x_1 = \frac{\alpha}{2} + k\pi; \\ 2x = \pi - \alpha + k.2\pi; & x_2 = \frac{\pi - \alpha}{2} + k\pi. \end{array}\right.$$

Bài 27

a) Vế trái có thể biến đổi như sau:

$$8\sin x\cos 3x \times \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos\frac{2}{3}\pi)$$
$$= 4\cos 3x\left(\sin x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 4\cos 3x\left[\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{2}\sin x\right]$$
$$= 2\cos 3x \sin 3x = \sin 6x.$$

Phương trình đã cho trở thành: $\sin 6x = 1$.

Vậy $6x = \frac{4k+1}{2}.\pi$; từ đó $x = \frac{4k+1}{12}.\pi$.

b) Phương trình đã cho có thể viết nếu đặt $x^2 = y$:

$$\frac{1-\cos 2y}{2}+\frac{1-\cos 4y}{2}=\frac{1-\cos 6y}{2}+\frac{1-\cos 8y}{2}$$, hay

$\cos 2y + \cos 4y = \cos 6y + \cos 8y$;

$2\cos 3y\cos y = 2\cos 7y\cos y$; $\cos y(\cos 3y - \cos 7y) = 0$;

hay $2\cos y\sin 2y\sin 5y = 0$. Từ đó:

- $\cos y = 0$, $y_1 = \frac{2k+1}{2}.\pi$;
- $\sin 2y = 0$, $2y = k\pi$, $y_2 = \frac{k\pi}{2}$;
- $\sin 5y = 0$, $5y = k\pi$, $y_3 = \frac{k\pi}{5}$ (với k = 0, 1, 2, ...)

Nhưng với k = 2n + 1 thì $y_2 = \frac{2n+1}{2}\cdot\pi = y_1$. Ngoài ra y_2 với k = 2n có cùng giá trị với y_3 khi k = 5n.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}.\pi} \text{ và } x = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, ...).$$

Bài 28

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$$4^{2\sin x} = 4^{\frac{1}{\cos x}}$$. Từ đó suy ra:

- $\cos x \neq 0$ vì vế phải vô nghĩa nếu $\cos x = 0$;
- $2\sin x = \frac{1}{\cos x}$.

Giải phương trình này được nghiệm là:

$$\sin 2x = 1 \text{ , } 2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi .$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi .$$

b) Ta có: $\cos x = 1$, $x = k.2\pi$.

$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$ mà nghiệm là 1 và $\frac{1}{2}$.

- $\sin x = 1$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$;
- $\sin x = \frac{1}{2}$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$x_1 = k.2\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$.

Bài 29

a) Đặt sinx – cosx = t và áp dụng hằng đẳng thức

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x,$$

ta có thể viết phương trình đã cho như sau:

$$t^2 + 12t - 13 = 0.$$

Giải ra được: $t_1 = -13$, $t_2 = 1$.

Nhưng $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, suy ra $|t| \le \sqrt{2}$ nên phải loại nghiệm $t_1 = -13$. Do đó ta phải giải tiếp phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mà nghiệm là:

$$x_1 = \pi + k.2\pi\ ;\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k.2\pi.$$

b) Với điều kiện $x \neq k\pi$, phương trình đã cho có thể viết:

$\cos^3 x + \cos^2 x = \sin^3 x + \sin^2 x.$

Chuyển tất cả số hạng sang vế trái rồi phân tích ra thừa số được:

$(\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\cos x + \sin x + \cos x) = 0.$

Từ đó:

- sinx – cosx = 0 có nghiệm là $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\cos x + \sin x + \cos x = 0$, tương đương với phương trình câu a) ở trên, mà nghiệm là $x_2 = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$ (loại nghiệm $x_3 = (2k+1)\pi$ vì với $x = n\pi$ phương trình đã cho vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad ; \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi .$$

Bài 30

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$4\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 1$, hay $-2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x = 1$.

Giải ra được $x = -\frac{\pi}{8} + k.\frac{\pi}{2}$.

b) Phương trình có thể viết:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 1 + \sin 2x .$$

Sau khi biến đổi được:

$$\sin x(3 + \sin 2x + \cos 2x) = 0.$$

Ta có sinx = 0 nên $x = k\pi$, còn phương trình 3 + sin2x + cos2x rõ ràng vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$.

Bài 31

a) Vế phải bằng: $3\sin x\cos x + 3\cos^2 x$.

Chia hai vế cho $\cos^2 x \neq 0$ được:

$$\tan^2 x(\tan x + 1) = 3(\tan x + 1), \text{ hay}$$

$$(\tan^2 x - 3)(\tan x + 1) = 0 .$$

Giải ra được:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi ,\ x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ và } x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi .$$

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2 - \frac{1}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{5}{4} = 0, \text{hay}$$

$$4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này được:

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$, từ đó $x = \frac{7\pi}{72} + k\pi$.

Nghiệm thứ hai bằng $\frac{5}{4}$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho vì $|\cos\alpha| \leq 1$.

Bài 32

a) Với $y \neq k\pi$ ta có:

$$\tan\frac{y}{2} - \cot\frac{y}{2} = \frac{\sin^2\frac{y}{2} - \cos^2\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = -\frac{2\cos y}{\sin y}.$$

Với $y \neq k\pi$ và $y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, vế phải bằng -2sinycosy.

Phương trình đã cho có dạng:

$$\tan y = 2\sin y\cos y.$$

Giải ra được: $y_1 = k\pi$, $y_2 = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}$. Cả hai giá trị này điều phải loại vì y_2 làm cho vế trái vô nghĩa.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Nhân cả hai vế của phương trình với $32\sin\frac{\pi y}{31}$ rồi áp dụng vài lần công thức $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, ta sẽ được:

$$\sin\frac{32}{31}\pi y = \sin\frac{\pi y}{31}, \text{hay } \sin\frac{\pi y}{2}\cos\frac{33}{62}\pi y = 0.$$

Giải ra được:

$$y_1 = 2k,\ y_2 = \frac{31}{33}(2k+1).$$

Sau khi thử lại ta thấy rằng nghiệm của phương trình đã cho là:

- $y_1 = 2k$ với $k \neq 31m$.
- $y_2 = \frac{31}{33}(2k+1)$ với $k \neq 33m + 16$. ($m = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ....).

Bài 33

a) Vế trái có thể biến đổi như sau:

$$\sin^4\frac{y}{3}+\cos^4\frac{y}{3}=\left(\sin^2\frac{y}{3}+\cos^2\frac{y}{3}\right)^2-2\sin^2\frac{y}{3}\cos^2\frac{y}{3}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2}{3}y.$$

Vậy phương trình đề cho trở thành: $\sin^2\frac{2y}{3}=\frac{3}{4}$.

Giải ra được: $y=\frac{3k\pm 1}{2}\pi$.

b) Áp dụng công thức $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ ta có:

$$\sin y\cos y(\sin y-\cos y)(\sin^4 y+\sin^3 y\cos y+\sin^2 y\cos^2 y+\sin y\cos^3 y+$$
$$+\cos^4 y)=\sin y-\cos y.$$

Từ đó:

- $\sin y-\cos y=0$ (1) mà nghiệm là $y=\frac{\pi}{4}+k\pi$;
- $\sin y\cos y(\sin^4 y+\sin^3 y\cos y+\sin y\cos^3 y+\cos^4 y+$
  $+\sin^2 y\cos^2 y)-1=0$ (2)

Ta biết rằng $\sin^4 y+\cos^4 y=(\sin^2 y+\cos^2 y)^2-2\sin^2 y\cos^2 y$ và $\sin^3 y\cos y+\cos^3 y\sin y=\sin y\cos y$, do đó nếu đặt sinycosy = t thì phương trình (2) có thể viết:

$$t^3-t^2-t+1=0,\ \text{hay}\ (t-1)^2(t+1)=0.$$

Nếu t = 1, tức là sinycosy = 1 thì sin 2y = 2, không thể được; nếu t = −1 thì sin2y = −2, cũng không thể được. Vậy phương trình (2) vô nghiệm. Thành thử:

Nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của (1), tức là $y=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Bài 34

a) Áp dụng hằng đẳng thức:

$\cos^6 y=\left(\frac{1+\cos 2y}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(1+3\cos 2y+3\cos^2 2y+\cos^3 2y\right)$ và công thức $\cos 6y=4\cos^3 2y=-3\cos 2y$, ta có biến đổi phương trình đã cho thành:

$$4\cos 2y + 5\cos 2y + 1 = 0.$$

Giải ra được: $\cos 2y = -1$ và $\cos 2y = \frac{1}{4}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$y_1 = (k + \frac{1}{2})\pi, \ y_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + k\pi.$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức $(\sin^2 y + \cos^2 y) = 1$ ta được:

$\sin^4 y + \cos^4 y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y$. Từ đó:

$\sin^8 y + \cos^8 y = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2y = \frac{17}{32}$, hay

$1 - \sin^2 2y + \frac{1}{8}\sin^4 2y = \frac{17}{32} \Rightarrow \sin^4 2y - 8\sin^2 2y - \frac{15}{4} = 0.$

Giải phương trình trùng phương này được:

$\sin^2 2y = 4 \pm \frac{7}{2} \Rightarrow \sin^2 2y = \frac{1}{2}; \ 2y = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $y = \frac{2k+1}{8}\cdot\pi$

Bài 35. Đặt $\sin y = a$, $\sin 2y = b$, $\sin 3y = c$, ta có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3.$$

Hay sau khi phân tích thành thừa số sẽ có dạng

$3(a + b)(b + c)(c + a) = 0$, tức là:

$(\sin y + \sin 2y)(\sin 2y + \sin 3y)(\sin y + \sin 3y) = 0$, hay

$\left(2\sin\frac{3y}{2}\cos\frac{y}{2}\right)\left(2\sin\frac{5y}{2}\cos\frac{y}{2}\right)(2\sin 2y\cos y) = 0.$

Từ đó ta được phương trình:

$\sin\frac{3y}{2}.\sin\frac{5y}{2}.\cos^2\frac{y}{2}.\sin 2y.\cos y = 0$. Vậy:

- $\sin\frac{3y}{2} = 0$, $y_1 = \frac{k.2\pi}{3}$
- $\sin\frac{5y}{2} = 0$, $y_2 = \frac{k.2\pi}{5}$

- $\cos\frac{y}{2} = 0,\ y_3 = (2k + 1)\pi$
- $\sin 2y = 0,\ y_4 = \frac{k\pi}{2}$
- $\cos y = 0\ ,\ y_5 = \frac{\pi}{2} + k\pi\ .$

Do các nghiệm y_3 và y_5 nằm trong nghiệm y_4, nên nghiệm của phương trình đã cho là:

$y = \frac{2}{3}k\pi\ ;\ \ y = \frac{2}{5}k\pi\ ;\ \ y = \frac{k}{2}\pi\ .$

b) Ta có: $(\sin^2 y)^5 + (\cos^2)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2y.$

Thay $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}\ ,\ \cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2}$ được:

$\left(\frac{1 - \cos 2y}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2y}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2y$, hay

$(1 - \cos 2y)^5 + (1 + \cos 2y)^5 = 58\cos^4 2y\ .$

Sau khi biến đổi ta được phương trình trùng phương

$$24\cos^4 2y - 10\cos^2 2y - 1 = 0\ .$$

Giải ra được nghiệm là:

$$\cos 2y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 2y = \pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi$$

$$\cos 2y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 2y = \pm\frac{3}{4}\pi + k.2\pi\ .$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$y_1 = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi\ ;\ \ y_2 = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi\ .$$

Bài 36

a) Cộng vào hai vế $2\sin^2 y\cos^2 y$ được:

$(\sin^2 y + \cos^2 y)^2 = \cos 4y + 2\sin^2 y\cos^2 y$, hay

$1 - \cos 4y = \frac{1}{2}\sin^2 2y.$

Giải ra được nghiệm là $y = \frac{k\pi}{2}$.

b) Ta có: $\cos y = 1$ và $\sin^2 y - \frac{3}{2}\sin y + \frac{1}{2} = 0$.

Phương trình thứ nhất cho $y_1 = k.2\pi$. Phương trình thứ hai cho $\sin y = 1$, $y_2 = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ và $\sin y = \frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$. Do y_2 chứa trong y_3, nên nghiệm của phương trình đã cho là:

$$y = k.2\pi \text{ và } y = \frac{\pi}{6} + k.2\pi.$$

Bài 38. Bất phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{1}{2}\sin y - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ hay}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin y - \cos\frac{\pi}{6}\cos y > \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ suy ra:}$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{hay } \cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Giải ra được:

$$\frac{3\pi}{4} + k.2\pi < \frac{\pi}{6} + y < \frac{5\pi}{4} + k.2\pi, \text{ hay}$$

$$\frac{7\pi}{12} + k.2\pi < y < \frac{13\pi}{12} + k.2\pi.$$

Do $0 \le y \le 2\pi$ nên $\frac{7\pi}{12} < y < \frac{13\pi}{12}$ (khi $k = 0$).

b) Bất phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{\tan^2 y - 1 - 1}{\tan^2 y - 1} < \frac{1}{2}, \text{ hay } 1 - \frac{1}{\tan^2 y - 1} < \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{\tan^2 y - 1} > \frac{1}{2}, \text{ hay } \begin{cases} \tan^2 y > 1 & (1) \\ \tan^2 y < 3 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) được $-\frac{\pi}{2} + k\pi < y < -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Giải (2) được $-\frac{\pi}{3} + k\pi < y < \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Như thế ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$-\frac{\pi}{3}+k\pi < y < -\frac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 39

a) Bất phương trình đã cho có dạng $\frac{\cos y+\sin y}{\cos y-\sin y}>0$ với $\sin y \neq 0$

hay $\frac{\cot y+1}{\cot y-1}>0$ với $\sin y \neq 0$. Từ đó ta có:

coty < –1 hay coty > 1.

Giải ra được: $-\frac{\pi}{4}+k\pi < y < \frac{\pi}{4}+k\pi$ với $y \neq k\pi$.

b) Do m > 0 nên với m > 1 ta được bất phương trình tương đương

siny > cosy , từ đó $\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)>0$ có nghiệm là

$\frac{\pi}{4}+k.2\pi < y < \frac{5\pi}{4}+k.2\pi$.

Với m < 1, ta được bất phương trình tương đương

siny < cosy, có nghiệm là $-\frac{3\pi}{4}+k.2\pi < y < \frac{\pi}{4}+k.2\pi$.

Với m = 1 thì bất phương trình vô nghiệm.

Bài 40

a) Đặt $t=\frac{3}{2}y+\frac{\pi}{12}$ bất phương trình đã cho có dạng $\sin t<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trên đoạn $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{5\pi}{2}$ thì nghiệm của bất phương trình là

$$\frac{3}{4}\pi < t < \frac{9}{4}\pi.$$

Tất cả nghiệm có dạng

$$\frac{3}{4}\pi+k.2\pi < t < \frac{9}{4}\pi+k.2\pi \quad (*)$$

Thay t vào (*) được:

$\frac{3}{4}\pi+k.2\pi < \frac{3}{2}y+\frac{\pi}{12} < \frac{9}{4}\pi+k.2\pi$, hay

$$\frac{4}{9}\pi + \frac{4}{3}k\pi < y < \frac{13}{9}\pi + \frac{4}{3}k\pi.$$

Đó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Vế trái của bất phương trình có mẫu là số dương vì:

$$|\sin y + \cos y| = \left|\sqrt{2}\,\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2}\,.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin^2 y > \frac{1}{4}\,,\ \text{hay}\ |\sin y| > \frac{1}{2}\,.$$

Giải ra được nghiệm là:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < y < \frac{5}{6}\pi + k\pi.$$

Bài 41

a) Từ hệ đã cho ta có ngay:

$$x + y = k\pi\ ,\ x - y = m\pi\,.$$

Từ đó $x = \dfrac{k+m}{2}.\pi$; $y = \dfrac{k-m}{2}.\pi$.

Theo điều kiện của đề bài thì:

$$0 \leq k + m \leq 2 \quad \text{và} \quad 0 \leq k - m \leq 2.$$

Các bất đẳng thức này thỏa mãn các cặp giá trị **sau đây của k và** m:

- $k = 0$, $m = 0$
- $k = 1$, $m = 0$
- $k = 1$, $m = -1$
- $k = 1$, $m = 1$
- $k = 2$, $m = 0$.

b) Phương trình thứ nhất có thể viết: $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1$, **từ đó với** phương trình thứ hai sẽ được:

$$\sin(x + y) = \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Vậy hoặc $x + y = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$ (1)

hoặc $x + y = -\frac{\pi}{4} + (2k + 1).\pi$ (2)

Phương trình thứ hai của hệ đã cho có thể biến đổi thành

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = \sqrt{2}$$

Từ đó $\cos(x - y) = \sqrt{2} - \cos(x + y)$ (3)

Nếu có (1) thì $\cos(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và từ (3) ta có:

$$\cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x - y = \pm\frac{\pi}{4} + m.2\pi.$$

Nếu có (2) thì $\cos(x + y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos(x - y) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, không thể được:

Vậy để tìm x và y ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} + k.2\pi \\ x - y = \pm\frac{\pi}{4} + m.2\pi. \end{cases}$$

Ta sẽ được nghiệm là:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + (k + m)\pi, \quad y_1 = (k - m)\pi$$

và $x_2 = (k + m)\pi, \quad y_2 = \frac{\pi}{4} + (k - m)\pi.$

Bài 42

a) Ta biết rằng $\left|\tan x + \frac{1}{\tan x}\right| \geq 2$, dấu (=) chỉ xảy ra khi tanx = 1 và tanx = −1.

Do vế phải có phương trình thứ nhất thỏa mãn điều kiện $\left|2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 2$ nên phương trình thứ nhất chỉ có thể thỏa mãn trong hai trường hợp sau:

$$\begin{cases} \tan x = 1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{và} \qquad \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (1) có nghiệm là $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{4} + m.2\pi$;

Hệ (2) có nghiệm là $x_2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $y_2 = -\frac{3\pi}{4} + p.2\pi$.

Nhận thấy rằng nghiệm của hệ (1) không thỏa mãn phương trình thứ hai của hệ đã cho, có nghiệm của hệ (2) chỉ thỏa mãn phương trình thứ hai (tức cũng là hệ đã cho) khi n lẻ, Do đó thay n = 2k + 1 vào nghiệm của hệ (2) ta được nghiệm của hệ đã cho là:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi \ ; \ y = -\frac{3\pi}{4} + p.2\pi .$$

b) Phương trình thứ nhất có thể viết:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0 .$$

Phương trình này thỏa mãn các trường hợp sau:

- $x = -y + k.2\pi$ (1)
- $y = m.2\pi$, x bất kì (2)
- $x = n.2\pi$, y bất kì (3)

Trường hợp (1) cùng với phương trình thứ hai $|x| + |y| = 0$ chỉ xảy ra khi k = 0, thật thế từ (1) suy ra bất đẳng thức $|x| + |y| \geq |k| 2\pi$ với điều kiện $|x| + |y| = 1$, tức là k = 0.

Khi đó hệ $\begin{cases} x = -y \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$

được hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{1}{2} \ ; \ y_1 = -\frac{1}{2} \text{ và } x_2 = -\frac{1}{2} \ ; \ y_2 = \frac{1}{2} .$$

Lí luận tương tự đối với các trường hợp còn lại (2) và (3) ta được thêm hai cặp nghiệm:

$x_3 = 1$, $y_3 = 0$; $x_4 = -1$, $y_4 = 0$

và $x_5 = 0$, $y_5 = 1$; $x_6 = 0$, $y_6 = -1$.

Tóm lại hệ đã cho có 6 nghiệm.

Bài 43

a) Từ phương trình thứ hai ta tìm tích cosx.cosy dựa vào phương trình thứ nhất:

$$\tan x.\tan y = \frac{\sin x.\sin y}{\cos x.\cos y} = \frac{\frac{3}{4}}{\cos x.\cos y} = 3\text{, từ đó:}$$

$\cos x.\cos y = \frac{1}{4}$. Như vậy hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Cộng từng vế, rồi trừ từng vế và áp dụng công thức về cosin của tổng và của hiệu hai góc ta sẽ được hệ tương đương sau:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Từ đó: $x - y = k.2\pi,\ x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + m.2\pi.$

Vậy $x = \pm\frac{\pi}{3} + (k + m)\pi;$

$$y = \pm\frac{\pi}{3}(m - k)\pi.$$

b) Cộng từng vế hai phương trình của hệ được cos (x − y) = 1. Trừ từng vế hai phương trình được $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$. Từ đó ta sẽ có hệ

$$\begin{cases} x - y = k.2\pi \\ x + y = \pm\frac{\pi}{3} + m.2\pi. \end{cases}$$

Giải ra được:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + (k + m)\pi\ ;\ y_1 = \frac{\pi}{6} + (m - k)\pi$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + (k + m)\pi\ ;\ y_2 = -\frac{\pi}{6} + (m - k)\pi.$$

Bài 44

a) Hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} & (1) \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

Chia từng vế (1) cho (2) được:

$$\tan\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ từ đó } x+y = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$$

hay $y = \frac{\pi}{3} - x + k.2\pi$. Thay vào (2) được:

$$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x + k.2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

hay $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\cos\frac{\pi}{6}.\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

hay $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, vậy $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + m.2\pi$.

Ta được nghiệm của hệ đã cho là:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + m.2\pi \text{ ; } y_1 = -\frac{\pi}{6} + (k-m)2\pi;$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + m.2\pi \text{ ; } y_2 = \frac{\pi}{2}(k-m)\pi.$$

b) Phương trình thứ nhất có thể viết:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2} = \frac{3}{4}$$

hay $\frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} = \frac{1}{4}$; $\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{4}$;

$$\cos 75^\circ \cos(x-y) = \frac{1}{4}; \cos(x-y) = \frac{1}{4\cos 75^\circ}$$

$$= \frac{1}{4\cos(90^\circ - 15^\circ)} = \frac{1}{4\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\cos 15^\circ}{2\sin 30^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{2 \times \frac{1}{2}} = \cos 15^\circ.$$

Vậy: $\cos(x - y) = \cos 15^\circ$; $x - y = \pm 15^\circ + k.360^\circ$ và $x + y = 75^\circ$.

Từ đó: $x_1 = 45^\circ + 180^\circ.k = (4k + 1).45^\circ$

$y_1 = 30^\circ - 180^\circ.k = (1 - 6k).30^\circ$

và $x_2 = 30^\circ + 180^\circ.k = (6k + 1).30^\circ$

$y_2 = 45^\circ - 180^\circ.k = (1 - 4k).45^\circ$.

Nếu thay n bằng −n vào x_2 và y_2 ta sẽ thấy rằng $x_1 = x_2$ và $y_2 = y_1$, điều này dễ nhận thấy vì các phương trình đối xứng đối với x và y.

Bài 45

a) Xét phương trình thứ nhất ta có:

$$|\tan x + \cot x| \geq 2 \text{ và } \left|2\sin\left(y - \frac{3\pi}{4}\right)\right| \leq 2$$

tương đương với các hệ:

$$\begin{cases} \tan x \cot x = 2 \\ \sin\left(y - \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \tan x + \cot x = -2 \\ \sin\left(y - \frac{3\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

Giải ra được:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ y_1 = \frac{5\pi}{4} + m.2\pi \qquad (1)$$

hoặc
$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ y_2 = \frac{\pi}{4} + m.2\pi \qquad (2)$$

Thay (1) và phương trình thứ hai được:

Vế trái là $\tan\left(\frac{5\pi}{4} + m.2\pi\right) + \cot\left(\frac{5\pi}{4} + m.2\pi\right) = \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4} = 2.$

Vế phải là $2\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k.2$

Muốn thỏa mãn phương trình thứ hai phải có k = 2n, do đó

$x = \frac{\pi}{4} + n.2\pi$, $y = \frac{5\pi}{4} + n.2\pi$ thỏa mãn hệ đã cho.

Nhưng cặp $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + m.2\pi\right)$ không thỏa mãn phương trình thứ hai (do 2 =0, vô lí) nên bị loại.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{4} + n.2\pi \ ; \ y = \frac{5\pi}{4} + m.2\pi .$$

b) Trong phương trình thứ hai ta thay tanx bằng $\frac{\sin x}{\cos x}$ và $\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$ sẽ được $\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}.\frac{\sin y}{\cos y}$. Kết hợp với phương trình thứ nhất được:

$\frac{\sqrt{2}\sin y}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}\sin y}{\cos y}$ hay $\sqrt{2}\sin y\cos y = \sqrt{3}\sin y\cos x$; suy ra:

$\sin y(\sqrt{2}\cos y - \sqrt{3}\cos x) = 0$. Từ đó:

- $\sin y = 0$, $y_1 = k\pi$. Thay vào phương trình thứ nhất được

  $\sin x = 0$, $x_1 = m\pi$.

- $\sqrt{2}\cos y - \sqrt{3}\cos x = 0$; $\sqrt{2}\cos y = \sqrt{3}\cos x$;

$\sqrt{2}\cos y = \pm\sqrt{3} \times \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{3} \times \sqrt{1 - 2\sin^2 y}$. Bình phương hai vế:

$2\cos^2 y = 3(1 - 2\sin^2 y) = 3(2\cos^2 y - 1)$, hay $\cos^2 y = \frac{3}{4}$.

Từ đó $\cos y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$.

Thay giá trị của cosy vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho được: $\sin x = \pm\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi$.

Do bình phương hai vế nên phải thử lại các giá trị của x_2 và y_2, sẽ thấy rằng l và n phải đồng thời chẵn hoặc đồng thời lẻ.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$x_1 = m\pi$; $y_1 = k\pi$;

$x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi$; $y_2 = \frac{\pi}{6} + n\pi$;

$x_3 = -\frac{\pi}{4} + l\pi$; $y_3 = -\frac{\pi}{6} + n\pi$ (l và n phải đồng thời chẵn hoặc lẻ).

Bài 46. Vì vế trái của phương trình thứ nhất của hệ đã cho luôn ≤ 1 nên hệ chỉ có nghiệm khi $p = 0$, khi đó ta được hệ:

$$\begin{cases} \sin x.\cos 2y = 1 \\ \cos x.\sin 2y = 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai cho hoặc $\cos x = 0$ hoặc $\sin 2y = 0$.

Nếu $\cos x = 0$ thì với $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ từ phương trình thứ nhất ta tìm được $y_1 = n\pi$ và với $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ta tìm được $y_2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Trường hợp $\sin 2y = 0$ không cho nghiệm mới. Do đó hệ chỉ có lời giải khi $p = 0$ và nghiệm là:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + m.2\pi,\ y_1 = n\pi;\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi,\ y_2 = (l + \frac{1}{2})\pi.$$

Bài 47. Bình phương hai phương trình của hệ được:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = m^2;$$

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = n^2;$$

Cộng rồi trừ từng vế hai phương trình được:

$$2 + 2\cos(\alpha - \beta) = m^2 + n^2$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha + \beta) = n^2 - m^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) có thể biến đổi thành:

$$2\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + 1] = n^2 - m^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}.$$

Bài 48. Ta biết rằng:

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x + y)\cos(x - y).$$

Do đó phương trình thứ hai của hệ có thể viết:

$$4\cos(x - y)\cos(x + y) = 1 + 4\cos^2(x - y).$$

Vậy hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 4\cos\varphi\cos(x + y) = 1 + 4\cos^2\varphi & (1) \\ x - y = \varphi & (2) \end{cases}$$

Ta có: $|4\cos\varphi\cos(x+y)| \le 4|\cos\varphi|$.

Mặt khác từ bất đẳng thức $(1 \pm 2\cos\varphi)^2 \ge 0$ suy ra

$4|\cos\varphi| \le 1 + 4\cos^2\varphi$. Dấu = chỉ xảy ra khi $2|\cos\varphi| = 1$.

Vậy hệ chỉ có nghiệm với điều kiện $|\cos\varphi| = \frac{1}{2}$.

Ta xét hai khả năng:

a) $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Từ (1) ta có $\cos(x + y) = 1$, tức là $x + y = k.2\pi$ (3)

Giải hệ $\begin{cases}(2)\\(3)\end{cases}$ được: $x_1 = \frac{\varphi}{2} + k\pi$, $y_1 = -\frac{\varphi}{2} + k\pi$.

b) $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$. Tương tự ta được:

$$x_2 = \frac{\varphi}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad y_2 = -\frac{\varphi}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Bài 49

Với điều kiện $\cos x \ne 0$ và $\cos y \ne 0$ ta có thể biến đổi hai phương trình đầu thành:

$$(a-1)\tan^2 x = 1 - b \qquad (1)$$

$$(b-1)\tan^2 y = 1 - a \qquad (2)$$

Nhưng $a \ne 1$ vì nếu $a = 1$ thì từ (1) ta có $b = 1$, trái với điều kiện $a \ne b$. Tương tự nếu $b = 1$ thì $a = 1$. Vậy chia từng vế (1) cho (2) được:

$$\left(\frac{\tan x}{\tan y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Xét phương trình thứ ba được: $\left(\frac{\tan x}{\tan y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$. Như thế:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Nếu $\frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a}$ thì $a = b$, không thể được.

Nếu $\frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a}$ thì a + b = 2ab. Đây là đáp số của bài toán.

Bài 50

a) Phương trình thứ nhất của hệ có thể viết:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2y) = \frac{1}{2}; \text{ hay}$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 1 \ ; \ 2\cos(x + y)\cos(x - y) = 1.$$

Ta được hệ tương đương:

$$\begin{cases} \cos(x + y)\cos(x - y) = \dfrac{1}{2} \\ x - y = \dfrac{4}{3}\pi. \end{cases}$$

Thay $x - y = \frac{4}{3}\pi$ vào phương trình thứ nhất được:

$$\cos(x + y)\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

Từ đó cos (x + y) = −1. Vậy $x + y = (2k + 1)\pi$.

Giải hệ $\begin{cases} x + y = (2k + 1)\pi \\ x - y = \dfrac{4}{3}\pi \end{cases}$

Ta có ngay $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi,\ y = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Đây cũng chính là nghiệm của hệ đã cho.

b) Đặt u = sinx + cosx, v = siny − cosy và lưu ý rằng $\sin 2x = u^2 - 1,\ \sin 2y = 1 - v^2$. Hệ đã cho trở thành hệ đại số:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + v \\ 2u^2 + v^2 = \dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Giải ra được hai nghiệm:

$$u_1 = -\frac{4}{3\sqrt{2}},\ v_1 = \frac{-7}{3\sqrt{2}},\ u_2 = \sqrt{2},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với tập hợp hai hệ:

$$(1)\begin{cases}\sin x + \cos x = -\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\\ \sin y - \cos y = \dfrac{-7}{3\sqrt{2}}\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}\sin x + \cos x = \sqrt{2}\\ \sin y - \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Hệ (1) vô nghiệm vì $|\sin y - \cos y| \le \sqrt{2}$, mà $\left|\dfrac{-7}{3\sqrt{2}}\right| > \sqrt{2}$.

Giải hệ (2) bằng cách đưa vào góc trung gian được:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ từ đó } x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi.$$

$$\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \text{ từ đó } y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + m\pi.$$

Đó là tập nghiệm của hệ đã cho.

Bài 51

a) Ta có: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + x\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$. Như thế hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y\\ \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y\end{cases}\qquad \text{(I)}$$

Nhân từng vế hai phương trình được: $1 = 8\cos^3 y \sin^3 y$.

Từ đó $\sin^3 2y = 1$; $\sin 2y = 1$; $2y = \dfrac{\pi}{2} + n.2\pi$, $y = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$.

Thay giá trị này vào hệ (I) và lưu ý rằng

$\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos\alpha$; $\sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin\alpha$

Ta được: $$\begin{cases}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = (-1)^n\\ \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = (-1)^n\end{cases}\qquad \text{(II)}$$

Nếu $n = 2k$ thì $y = \dfrac{\pi}{4} + k.2\pi$ và hệ (II) tương đương với một phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$, từ đó $x=m\pi$.

Nếu n = (2k + 1) thì $y=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$ và hệ (II) tương đương với phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-1$, từ đó $x=-\frac{\pi}{2}+m\pi$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$(m\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+k.2\pi)\ ;\ \left(-\frac{\pi}{2}+m\pi;\ \frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right)$.

b) Bình phương hai phương trình của hệ đã cho rồi cộng từng vế được phương trình:

$$2=1+2\cos y+\cos^2 y+\sin^2 y.$$

Từ đó cosy = 0, $y=\frac{\pi}{2}+m\pi$. Thay giá trị này của y vào hệ đã cho được hệ:

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin x=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Nếu n = 2k thì $\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$

Từ đó: $x=\frac{\pi}{4}+m.2\pi$ và $y=\frac{\pi}{2}+k.2\pi$.

Nếu n = 2k + 1 thì $\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$.

Từ đó $x=-\frac{\pi}{4}+m.2\pi$ và $y=\frac{3}{2}\pi+k.2\pi$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$\left(\frac{\pi}{4} + m.2\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + k.2\pi\right)\ ;\ \left(-\frac{\pi}{4} + m.2\pi\ ;\ \frac{3}{2}\pi + k.2\pi\right).$$

Bài 52

a) Do $1 = 2^0$ và $4 = 16^{\frac{1}{2}}$ nên hệ đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta = 0 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Giải ra sẽ được:

- $\sin\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\beta = -\frac{1}{2}$;
- $\sin\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}$.

Từ đó nghiệm của hệ là:

$$\alpha_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \beta_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + k.2\pi$$

$$\alpha_2 = -(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \beta_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k.2\pi.$$

b) Ta biết rằng: nếu $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ thì:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Trước tiên ta xét $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ thế thì $\cos^2\alpha = 1$.

Suy ra $\cos\beta = \cos\gamma = 0$.

Vì $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ và α , β, γ đều không âm nên ta có nghiệm là $(0; 90^\circ; 90^\circ)$. Tương tự với $\sin\frac{\beta}{2}$ và $\sin\frac{\gamma}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$(0; 90^\circ; 90^\circ)$; $(90^\circ; 0; 90^\circ)$; $(90^\circ; 90^\circ; 0)$.

D. BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 53. Giải phương trình lượng giác:

a) $1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2$;

b) $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.

Bài 54. Giải:

a) $3\tan^2 x-\frac{1}{\cos^2 x}=1$;

b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

Bài 55. Giải:

a) $\sin 2x+\tan x=2$;

b) $\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x$.

Bài 56. Giải:

a) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$;

b) $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$.

Bài 57

a) Chứng minh phương trình $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$ vô nghiệm;

b) Giải: $\sin^2 x(\tan x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$.

Bài 58. Giải các hệ phương trình lượng giác:

a) $\begin{cases} x-y=\frac{2\pi}{3} \\ \cos x+\cos y=-\frac{1}{2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1. \end{cases}$

Bài 59. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \sin(x-y)=-1 \\ \cos(x+y)=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sin x = \sin y \\ 2\cos x = 1 - \cos y. \end{cases}$

Bài 60. a) Giải hệ:

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x.\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

b) Tính cosx và cosy của hệ sau:

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \dfrac{1}{6}(1 - 2\sqrt{5}) \\ \cos(x-y) = \dfrac{1}{6}(1 + 2\sqrt{5}). \end{cases}$$

Bài 61. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \cos 2\alpha = (\cos\alpha - \dfrac{1}{2})(1 + 2\sin 2\beta) - \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha(\tan^3\beta + \cot^3\beta) = 3\cot\alpha; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) = 4\left(\beta + \dfrac{1}{\beta}\right) = 5\left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right) \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1. \end{cases}$

Bài 62. Giải hệ:

a) $\begin{cases} \sin(\beta - 3\alpha) = 2\sin^3\alpha \\ \cos(\beta - 3\alpha) = 2\cos^3\alpha; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \tan\alpha = \tan^3\beta \\ \sin\alpha = \cos 2\beta. \end{cases}$

Bài 63. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\beta$ theo m và p biết rằng $\sin\alpha = m\sin\beta$ và $\tan\alpha = p\tan\beta$..

Bài 64.

Ba số m, n, p phải thỏa mãn điều kiện gì để hệ:

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2m \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2n \\ \tan\alpha.\tan\beta = p \end{cases}$$

có ít nhất một nghiệm?

Bài 65. Tìm giá trị lớn nhất của p để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 \\ \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma = p. \end{cases}$$

ĐÁP SỐ

Bài 53.

a) $x = k\pi$; $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$;

b) Cuối cùng giải phương trình cos4x.sin3x.sinx = 0 mà đáp số là:

$x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{k\pi}{3}$.

Bài 54.

a) $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$;

b) Cuối cùng giải phương trình $2\cos x.\sin\frac{5}{2}x.\cos\frac{1}{2}x = 0$ mà đáp số là: $x_1 = \frac{2k+1}{2}.\pi$; $x_2 = \frac{2}{5}k\pi$; $x_3 = (2k+1)\pi$.

Bài 55.

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$;

b) Cuối cùng giải phương trình $\cos 4x(2\cos 3x - 1) = 0$ mà đáp số là: $x_1 = \frac{2k+1}{8}\pi$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$.

Bài 56.

a) Cuối cùng giải phương trình $2\cos x\sin 2x\sin 5x = 0$ mà đáp số là: $x_1 = \frac{k\pi}{5}$; $x_2 = \frac{2k+1}{2}\pi$;

b) $x = \frac{2k+1}{8}\pi$.

Bài 57.

a) Chia hai vế cho 2 được $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 4x = 1$, rồi chứng minh với $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$ và $\sin 4x = \pm 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $x_1 = (4k-1)\frac{\pi}{4}$; $x_2 = (3k \pm 1)\frac{\pi}{3}$.

Bài 58.

a) $x = \pi + k.2\pi$, $y = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi$, $y = -\pi + k.2\pi$.

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \pi - k\pi$ và $x = \pi + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} - k\pi$.

Bài 59.

a) $x = (2k+m)\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + (m-2k)\frac{\pi}{2}$;

b) $x = k.2\pi$, $y = \pi + m.2\pi$.

Bài 60.

a) $x = k.2\pi$, $y = \frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$, $y = 0$;

b) $\cos x = \pm\frac{\sqrt{29} \pm \sqrt{5}}{12}$, $\cos y = \pm\frac{\sqrt{29} \mp \sqrt{5}}{12}$.

Bài 61.

a) Đưa phương trình thứ nhất về dạng $(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - \sin 2\beta) = 0$. Đáp số là:

$$(4k+1)\frac{\pi}{4} \text{ ; } (6m \pm 1)\frac{\pi}{3} \text{ và } k\pi + (-1)^k \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ; } 2m\pi \pm \left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

b) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right);\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-1\right)$.

Bài 62.

a) Bình phương hai vế của mỗi phương trình rồi cộng chúng từng vế được:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{1}{4}.$$

Đáp số là: $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \beta = (2m+1)\pi$.

b) Đưa phương trình thứ hai về dạng $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)$. Đáp số là:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + 2k\pi \ ; \ \beta_1 = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + m\pi \text{ và}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + 2k\pi \ ; \ \beta_2 = -\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + m\pi .$$

Bài 63.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-m^2}{1-p^2}}, \ \sin\beta = \pm\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m^2-p^2}{1-p^2}}.$$

Bài 64.

Ba số m, n, p phải thỏa mãn hai trường hợp sau để có ít nhất một nghiệm:

a) $0 < m^2 + n^2 \le 1$ và $p = \frac{(m^2+n^2)^2 -}{(m^2+n^2)^2 - m^2}$;

b) $m = n =$ và p là mọi số không âm.

Bài 65.

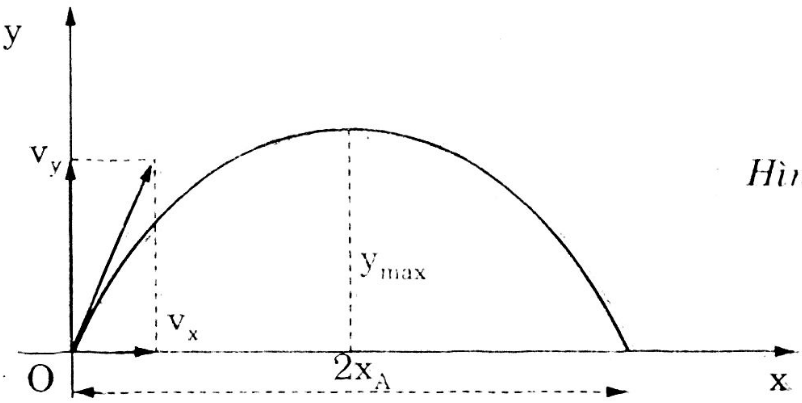
Giá trị lớn nhất của p là $p = \frac{1}{27}$ để hệ đã cho có nghiệm.

BẠN CÓ BIẾT?

Chuyển động của viên đạn bắn ra từ nòng súng

Người ta tính rằng, nếu không kể sức cản của không khí, thì một viên đạn bắn ra từ nòng súng vạch trong không gian một đường parabol nằm trong mặt phẳng thẳng đứng của trục nòng súng.

Giả sử α là góc của nòng súng với mặt đất, v_o là vận tốc ban đầu của viên đạn gồm hai thành phần v_x nằm ngang và v_y thẳng đứng (hình 8), ta có:



Hình 8

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha .$$

Quãng đường x chuyển động trong t giây là:

$$x = (v_0 \cos\alpha).t \qquad (1)$$

Thành phần v_y thẳng đứng chuyển động theo định luật sau:

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ (g là gia tốc trọng trường)

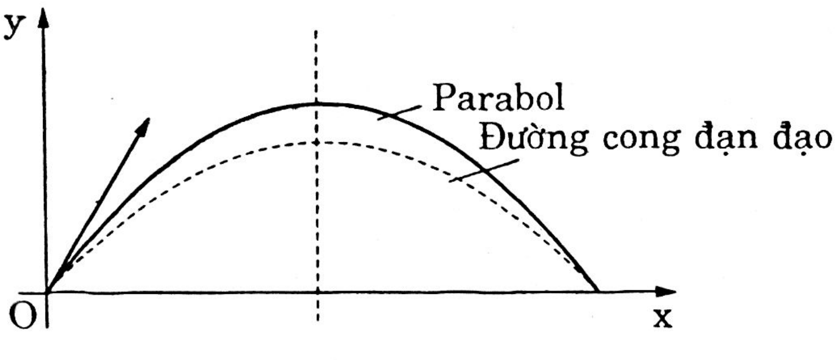
và quãng đường y của viên đạn chuyển động theo phương thẳng đứng là:

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) ta có: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, thay giá trị này của t vào (2) được phương trình:

$$y = \frac{x \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

hay $$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.x^2 .$$



Hình 9

Đó là phương trình parabol khi viên đạn bắn ra từ nòng súng. Công thức này biểu thị tương quan giữa độ cao y trên mặt đất và khoảng cách nằm ngang x của nó từ điểm bay ban đầu (hình 9).

Công thức có dạng hàm số bậc hai:

$$y = bx - ax^2.$$

Đỉnh của parabol này có tọa độ là $x_A = -\frac{b}{2a}$, $y_A = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Trong trường hợp trên thì:

$$x_A = \frac{\tan\alpha . v_o^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{v_o \sin 2\alpha}{2g}$$

$$(\text{vì } \tan\alpha\cos^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{2}).$$

Ta hãy tìm xem với góc α nào thì viên đạn đi xa nhất. Muốn thế ta tìm hoành độ của điểm rơi của viên đạn bằng cách cho y = 0, tức là:

$x\tan\alpha + \frac{-gx^2}{2v_o^2\cos^2\alpha} = 0$. Phương trình bậc hai khuyết này có nghiệm là:

$$x_1 = 0 \text{ và } x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g} (= 2x_A)$$

trong đó x_1 ứng với điểm gốc O là điểm xuất phát của viên đạn và x_2 ứng với điểm rơi của viên đạn.

Điểm rơi sẽ xa nhất khi x_2 đạt cực đại, tức là khi $\sin 2\alpha = 1, \alpha = 90^o$, khi đó $x_2 \max = \frac{v_o^2}{9}$. Vậy viên đạn rơi xuống đất khi góc bắn $\alpha = 45^o$.

Nếu $v_o = 600 m/s$ thì $x_2 \max \approx \frac{360000}{10} \approx 36000 = 36(km)$.

E. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$ có:

A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. Vô nghiệm.

2. Phương trình $\dfrac{2}{1+\tan x} = 0$ có:

A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. Vô nghiệm.

3. Các phương trình sau:

a) $x^2 - (\sin\alpha + \cos\alpha)x + \sin\alpha\cos\alpha = 0$ có nghiệm là:

A. $\sin(-\alpha)$ và $\cos(-\alpha)$ B. $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ C. $= \sin\dfrac{\alpha}{2}$ và $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

b) $y^2 - (\tan\alpha + \cot\alpha)y + 1 = 0$ có nghiệm là:

A. $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ B. $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ và $\cot\dfrac{\alpha}{2}$ C. $-\tan\alpha$ và $-\cot\alpha$.

4. Các phương trình sau:

a) $\tan x + \tan(45° - x) = 1$ có nghiệm là:

A. $k\cdot 90°$ và $30° + k\cdot 90°$

B. $k\cdot 180°$ và $45° + k\cdot 180°$

C. Vô nghiệm.

b) $\tan y + \cot 10° = \cos(y - 10°)$ có nghiệm là:

A. Vô nghiệm B. $k\cdot 180°$ C. $k\cdot 45°$.

5. Các phương trình sau:

a) $\sin x\cos x = 0{,}25$ có nghiệm là:

A. $15° + k\cdot 180°$ và $75° + k\cdot 180°$

B. $30° + k\cdot 180°$ và $60° + k\cdot 180°$

C. $45° + k\cdot 180°$ và $-45° + k\cdot 180°$.

b) $\sin^2 y - \cos^2 y = \dfrac{1}{2}$ có nghiệm là:

A. $\pm 30° + k$ B. $\pm 120° + k\cdot 180°$ C. $\pm 60° + k\cdot 180°$.

6. Phương trình $\cos^2 t - \sqrt{3}\sin 2t = 1 + \sin^2 t$ có nghiệm là:

A. $\frac{\pi}{2}$ và $-\frac{\pi}{6}+k\pi$ B. $k\pi$ và $-\frac{\pi}{3}+l\pi$ C. $\frac{\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

7. Phương trình $8\sin^2 z + 6\cos^2 z - 13\sin 2z = 0$ có nghiệm là:

A. $71^\circ 33' + k\cdot 180^\circ$ và $14^\circ 02' + k\cdot 180^\circ$

B. $70^\circ 12' + k\cdot 180^\circ$ và $25^\circ 4' + k\cdot 180^\circ$

C. $72^\circ + k\cdot 180^\circ$ và $15^\circ + k\cdot 180^\circ$.

8. Phương trình $\cos v + \cos 3v = \cos 2v$ có nghiệm là:

A. $\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ và $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

B. $\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ và $\pm\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$

C. $\frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ và $\pm\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$

9. Giải phương trình $\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = \frac{1}{2}$ sẽ được nghiệm là:

A. $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ B. $\pm\frac{\pi}{2} + k\pi$ C. $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

10. Giải phương trình $\sin^3 y\cos y - \cos^3 y\sin y = \frac{1}{4}$ sẽ được nghiệm là:

A. $-\frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$ C. $-\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2}$.

11. Phương trình $\cos 4z + 2\cos^2 z = 0$ có nghiệm là:

A. $\frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ và $\pm\frac{\pi}{2} + k\pi$

B. $\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $\pm\frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ và $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

12. Phương trình $\sin(t + 45^\circ)\cos(t + 15^\circ) = \frac{1}{2}$ có nghiệm là:

A. $-15^\circ + k\cdot 180^\circ$ và $45^\circ + l\cdot 180^\circ$

B. $-25^\circ + k\cdot 180^\circ$ và $35^\circ + l\cdot 180^\circ$

C. $-10^\circ + k\cdot 180^\circ$ và $50^\circ + l\cdot 180^\circ$.

13. Phương trình $\cot 2y - \cot 4y = 2$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. Vô nghiệm

14. Phương trình $\tan(2z + 1)\cdot\tan(3z - 1) = 1$ có nghiệm là:

A. $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$ C. $\frac{\pi}{12} + k\pi$.

15. Phương trình $\sin^4\frac{t}{3} + \cos^4\frac{t}{3} = \frac{5}{8}$ có nghiệm là:

A. $(3k + 1)\frac{\pi}{2}$ B. $(2k + 1)\pi$ C. $(4k + 1)\frac{\pi}{2}$.

16. Muốn phương trình $\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi = p$ thì giá trị của p phải là:

A. $|p| \le 4$ B. $|p| \le 2$ C. $p \le 1$.

17. Chứng tỏ hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y = \dfrac{1}{2}\\ x + y = 120^\circ\end{cases}$$ có nghiệm là:

A. $x = 45^\circ + k\cdot180^\circ$; $y = 120^\circ + k\cdot180^\circ$

B. $x = -90^\circ + k\cdot180^\circ$; $y = -30^\circ + k\cdot180^\circ$

C. $x = 90^\circ + k\cdot180^\circ$; $y = 30^\circ - k\cdot180^\circ$

và $x = 30^\circ + k\cdot180^\circ$; $y = 90^\circ - k\cdot180^\circ$.

18. Chứng tỏ hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = 2\\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2\end{cases}$$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\cdot2\pi$, $y = \frac{\pi}{3} + m\cdot2\pi$

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot2\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + m\cdot2\pi$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot2\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + m\cdot2\pi$.

19. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + (k+m)\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{6}(m-k)\pi$

B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + (k+m)\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3}(m-k)\pi$

C. $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi$.

20. Cho x và y là hai góc nhọn, chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} \tan x - \tan y = x - y \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $x = y = \frac{\pi}{3}$ B. $x = y = \frac{\pi}{4}$ C. $x = y = \frac{\pi}{6}$.

Trả lời

1. Đáp án A

2. Đáp án C

3. a) Đáp án B b) Đáp án A

4. a) Đáp án B b) Đáp án A

5. a) Đáp án A b) Đáp án C

6. Đáp án B

7. Đáp án A

8. Đáp án B

9. Đáp án C

10. Đáp án A

11. Đáp án C

12. Đáp án A

13. Đáp án B

14. Đáp án B

15. Đáp án A

16. Đáp án B

17. Đáp án C

18. Đáp án B

19. Đáp án A

20. Đáp án B.

Dạng toán 4

CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1) Dạng toán này gồm hai loại:

- Loại chứng minh các hệ thức lượng giác trong tam giác;

- Loại xác định dạng của tam giác khi biết tam giác đó cần thỏa mãn một số hệ thức lượng giác.

Với loại thứ nhất phải vận dụng giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt (cung đối nhau, cung bù nhau, cung hơn kém π, cung phụ nhau) và các công thức lượng giác (công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức biến đổi tích thành tổng, công thức biến đổi tổng thành tích) để chứng minh các hệ thức lượng đã cho.

Với loại thứ hai phải biến đổi hệ thức đã cho để chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau (tam giác cân), có một góc vuông (tam giác vuông), có ba góc hoặc ba cạnh bằng nhau (tam giác đều), có một góc bằng 36^o hoặc 108^o, một góc bằng 60^o hoặc 120^o v.v...

Ngoài ra còn có loại vẽ đồ thị các hàm số lượng giác như vẽ đồ thị $y = |\sin x|$ và $y = -\sin x$; $y = |\cos x|$ và $y = 1 + |\cos x|$ v.v...

B. ĐỀ BÀI

Một số hệ thức lượng giác trong tam giác

Bài 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có hệ thức sau:

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Bài 2. Chứng minh: nếu tam giác PQR mà $\widehat{Q} > \widehat{R}$ và α là góc nhọn tạo bởi trung tuyến PM với cạnh QR thì ta có hệ thức:

$$2\cot\alpha = \cot R - \cot Q.$$

Bài 3. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác MNP là tam giác đều là tích:

$$\cos M.\cos N.\cos P = \frac{1}{8}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1$;

b) $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu D, E, F là ba góc của một tam giác thì:

a) $\sin\frac{D}{2}.\sin\frac{E}{2}.\sin\frac{F}{2} < \frac{1}{4}$;

b) $\tan^n D + \tan^n E + \tan^n F \geq 3 + 3\times\frac{n}{2}$ (n nguyên dương).

Bài 6. Cho tam giác nhọn MNP, chứng minh:

a) $\left(\frac{\sin M}{\cos N\cos P} - \sin M\right)\left(\frac{\sin N}{\cos P\cos M} - \sin N\right)\left(\frac{\sin P}{\cos M\cos N} - \sin P\right)$
$\geq 27\sin M\sin N\sin P$;

b) $\sin M + \sin N + \sin P > \cos M + \cos N + \cos P$.

Bài 7. Cho S, T, V là ba góc của một tam giác, chứng minh các hệ thức sau:

a) $tv.\cot\frac{S}{2} + sv.\cot\frac{T}{2} + st.\cot\frac{V}{2} = 4Rp^2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{v} - \frac{3}{p}\right)$,

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và p là nửa chu vi tam giác; s, t, v là 3 cạnh ứng với 3 góc S, T, V.

b) $(p - s)^2\sin S + (p - t)^2\sin T + (p - v)\sin V$

$$= 4r(2R - r)\cos\frac{S}{2}\cos\frac{T}{2}\cos\frac{V}{2},$$

trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài 8. Chứng minh các bất đẳng thức sau trong tam giác DEF:

a) $\frac{\sin D + \sin E + \sin F}{\cos D + \cos E + \cos F} < 2$;

b) $(1+\sin^2 D)(1+\sin^2 E)(1+\sin^2 F) > 4$.

Xác định dạng của tam giác

Bài 9. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\sin M = \dfrac{\sin N + \sin P}{\cos N + \cos P}$ thì tam giác MNP vuông tại M;

b) Nếu $\dfrac{\sin N}{\sin P} = 2\cos M$ thì tam giác MNP cân tại N.

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\cos D.\cos E.\cos F = \dfrac{1}{8}$ thì tam giác DEF đều;

b) Nếu $\dfrac{\tan E}{\tan F} = \dfrac{\sin^2 E}{\sin^2 F}$ thì tam giác DEF vuông hoặc cân tại D.

Bài 11

a) Các góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B).$$

Chứng minh tam giác ABC cân.

b) Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$ab + bc + ca = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

trong đó p là nửa chu vi, R và r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài 12

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác DEF có $\widehat{D} = 2\widehat{E}$ là:

$$\sin^2 D - \sin^2 E = \sin E \sin F.$$

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác DEF đều là:

$$\begin{cases} \sin D + \sin E = 2\sin F \\ \tan D + \tan E = 2\tan F. \end{cases}$$

Bài 13

a) Giải thích tại sao nếu tam giác ABC có hệ thức:

$$\tan A + 2\tan B = \tan A.\tan^2 B$$

thì tam giác này cân.

b) Giải thích tại sao nếu tam giác ABC có hệ thức:

$$\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$$

thì tam giác có ít nhất một góc bằng 60° hoặc 120°.

Bài 14

a) Trong tam giác MNP các góc thỏa mãn điều kiện:

$$\sin 5M + \sin 5N + \sin 5P = 0$$

thì tam giác có ít nhất một góc bằng 36° hoặc 108°.

b) Trong tam giác MNP các góc thỏa mãn điều kiện

$$\sin M + \sin N \geq 2\sin P \text{ và}$$

$$\cos M + \cos N \geq 2\cos P$$

thì tam giác này đều.

Vẽ đồ thị các hàm số lượng giác

Bài 15

Vẽ đồ thị các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \sin\frac{x}{2}$;

b) $y = 1 + |\sin x|$.

Bài 16

Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |\cos x|$;

b) $y = 1 + |\cos x|$.

Bài 17

Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |\tan x|$;

b) $y = |\sin x - \cos x|$.

C. GỢI Ý PHƯƠNG PHÁP GIẢI - GIẢI

Bài 1

Do $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ là các góc nhọn nên $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ **đều dương.**

Ta có: $\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}} = \cot\dfrac{C}{2} = \tan\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}}{1 - \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}$, hay

$1 - \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$. Từ đó:

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1,$$

tức là tổng ba số dương bằng 1.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương này ta có:

$$1 = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} \geq$$

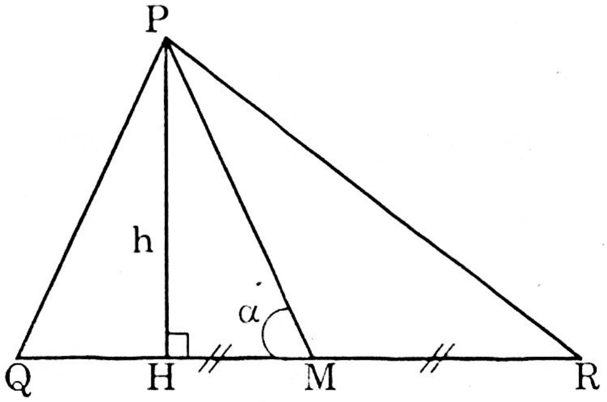
$$\geq 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}.$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}} \leq \frac{1}{3}, \text{ hay}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Bài 2



Hình 10

Hạ đường cao PH (hình 10) và đặt PH = h, QR = p

ta có: $\cot\alpha = \dfrac{HM}{h}$, $\cot Q = \dfrac{QH}{h}$. $\cot R = \dfrac{HR}{h}$.

Do $QH = QM - HM = \dfrac{p}{2} - HM$ và

$HR = HM + MR = HM + \dfrac{p}{2}$, suy ra

$HR - QH = 2HM$, hay:

$$\cot R - \cot Q = \frac{HR}{h} - \frac{QH}{h} = 2 \times \frac{HM}{h} = 2\cot\alpha .$$

Bài 3

Tích đã cho có thể viết:

$\cos M.\cos N.\cos P = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 1 = 8\cos M\cos N\cos P$, hay

$1 = 4\cos M[\cos(N+P) + \cos(N-P)]$; suy ra

$1 = 4\cos M[-\cos M + \cos(N-P)]$, hay

$4\cos^2 M - 4\cos M\cos(N-P) + 1 = 0$, tức là

$4\cos^2 M - 4\cos M\cos(N-P) + \cos^2(N-P) + 1 - \cos^2(N-P) = 0$, hay

$[2\cos M - \cos(N-P)]^2 + \sin^2(N-P) = 0.$

Vì tổng hai bình phương của hai biểu thức bằng 0 nên mỗi biểu thức phải bằng 0, tức là:

$$\begin{cases} 2\cos M - \cos(N-P) = 0 \\ \sin(N-P) = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta được: $\begin{cases} \cos M = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M = 60^\circ \\ N = P. \end{cases}$

Vậy $M = N = P = 60^\circ$, tức là ΔMNP đều.

Bài 4

a) Do $\tan\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{B}{2}, \tan\dfrac{C}{2}$ đều là số dương và $A + B = \pi - C$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{C}{2} + \tan^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\geq \sqrt{\tan^2\frac{A}{2}.\tan^2\frac{B}{2}} + \sqrt{\tan^2\frac{B}{2}.\tan^2\frac{C}{2}} + \sqrt{\tan^2\frac{C}{2}.\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$$

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{\pi - C}{2}\tan\frac{C}{2}\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)$$

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)$$

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$= 1.$$

b) Ta có; $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{\pi - C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2} - \left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2\right]$$

$$\le \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Bài 5

a) Ta có $\frac{D}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{E+F}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{E}{2} < \frac{\pi}{2}$, nên

$$\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{E}{2}\right)\sin\frac{E}{2} = \cos\frac{E}{2}\sin\frac{E}{2}$$

$= \frac{1}{2}\sin E$. Do đó $\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2} < \frac{1}{2}$.

Mặt khác vì $D + E + F = \pi$ nên phải có một góc nhỏ hơn $\frac{\pi}{3}$, ttacó thể cho rằng chính góc $F < \frac{\pi}{3}$.

Thế thì $\frac{F}{2} < \frac{\pi}{6}$ và $\sin\frac{F}{2} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Từ đó:

$$\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

b) Do $D + E + F = \pi$ nên ta có:

$$\tan D + \tan E + \tan F = \tan D.\tan E.\tan F.$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{\tan^n D + \tan^n E + \tan^n F}{3} \geq \sqrt[3]{\tan^n D.\tan^n E.\tan^n F}$$

$$= \sqrt[3]{(\tan D \tan E \tan F)^n} \qquad (1)$$

Lại có: $\tan D + \tan E + \tan F \geq 3.\sqrt[3]{\tan D.\tan E.\tan F} =$

$= 3 \times \sqrt[3]{\tan D + \tan E + \tan F}$, hay

$$\sqrt[3]{\tan D + \tan E + \tan F}\left(\sqrt[3]{(\tan D + \tan E + \tan F)^2} - 3\right) \geq 0;$$

$\sqrt[3]{(\tan D + \tan E + \tan F} > 0$. Suy ra:

$$\sqrt[3]{(\tan D + \tan E + \tan F)^2} \geq 3$$

rồi $\sqrt[3]{(\tan D + \tan E + \tan F)^n} \geq \sqrt{3^n}$ (2)

So sánh (1) và (2) được:

$$\frac{\tan^n D + \tan^n E + \tan^n F}{3} \geq \sqrt{3^n}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 6

a) Do sinM, sinN và sinP đều dương nên bất đẳng thức đã cho có thể viết:

$$\frac{1 - \cos N \cos P}{\cos N \cos P}.\frac{1 - \cos P \cos M}{\cos P \cos M}.\frac{1 - \cos M \cos N}{\cos M \cos N} \geq 27 \qquad (1)$$

Đặt $m = \tan\frac{M}{2}$, $n = \tan\frac{N}{2}$, $p = \tan\frac{P}{2}$ (với $0 < m, n, p < 1$),

ta thấy rằng:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2(m^2 + n^2)}{(1 - m^2)(1 - n^2)}.\frac{2(n^2 + p^2)}{(1 - n^2)(1 - p^2)}.\frac{2(p^2 + m^2)}{(1 - p^2)(1 - m^2)} \geq 27 \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

Vế trái của (2) $\geq \frac{4mn}{(1-m^2)(1-n^2)}.\frac{4np}{(1-n^2)(1-p^2)}.\frac{4pm}{(1-p^2)(1-m^2)}$,

hay:

Vế trái của (2) $\geq \tan^2 M.\tan^2 N.\tan^2 P$ (3)

Vì tam giác MNP nhọn nên ta lại có theo bất đẳng thức Côsi:

$1 = \cot M \cot N + \cot N \cot P + \cot P \cot M$

$\geq 3 \times \sqrt{\cot^2 M.\cot^2 N.\cot^2 P}$. Suy ra $\tan^2 M.\tan^2 N.\tan^2 P \geq 27$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng.

Dấu = xảy ra khi tam giác MNP đều.

b) **Ta có:**

$\cos M + \cos N + \cos P =$

$= \frac{1}{2}(\cos M + \cos N + \cos N + \cos P + \cos P + \cos M)$

$= \sin\frac{P}{2}\cos\frac{M-N}{2} + \sin\frac{M}{2}\cos\frac{N-P}{2} + \sin\frac{N}{2}\cos\frac{P-M}{2}$ (*)

Do $\cos\frac{M-N}{2} \leq 1$ và P nhọn nên $0 < \frac{P}{2} < 60^\circ$. Suy ra:

$2\cos\frac{P}{2} > 1$ **và** $\cos\frac{M-N}{2} < 2\cos\frac{P}{2}$. Do đó từ (*) ta suy ra ngay:

$\cos M + \cos N + \cos P < \sin M + \sin N + \sin P$.

Bài 7

a) **Biến đổi vế phải ta có:**

$$4Rp^2\left(\frac{p}{s} - 1 + \frac{p}{t} - 1 + \frac{p}{v} - 1\right) = 4Rp\left(\frac{p-s}{s} + \frac{p-t}{t} + \frac{p-v}{v}\right)$$

$$= 4Rpr\left(\frac{1}{2R\sin S\tan\frac{S}{2}} + \frac{1}{2R\sin T\tan\frac{T}{2}} + \frac{1}{2R\sin V\tan\frac{V}{2}}\right)$$

$$= \mathcal{S}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{S}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{T}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{V}{2}}\right)$$; với $\mathcal{S}$ là dt tam giác.

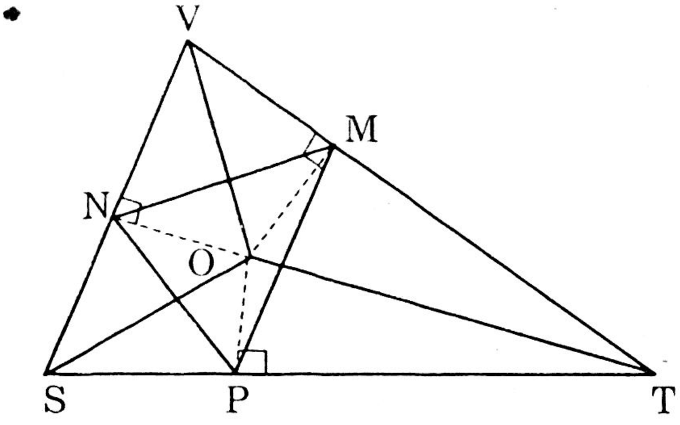
Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{2\mathscr{S}}{\sin S}\cot\frac{\mathscr{S}}{2}+\frac{2\mathscr{S}}{\sin T}\cot\frac{T}{2}+\frac{2\mathscr{S}}{\sin V}\cot\frac{V}{2}$$

$$=\mathscr{S}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{S}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{T}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{V}{2}}\right).$$

Vậy vế phải đúng bằng vế trái.

b) Biến đổi vế phải ta có (hình 11):



Hình 11

$$r(2R-1)(\sin S+\sin T+\sin V)=r(s+t+v)-r^2(\sin S+\sin T+\sin V)$$

$$=2\mathscr{S}-r^2(\sin S+\sin T+\sin V).$$

Biến đổi vế trái ta có:

2 (dt SPN + dt TPM + dt VNM)

$$=2\mathscr{S}-2(\text{dt OMN}+\text{dt ONP}+\text{dt OMP}).$$

$$=2\mathscr{S}-r^2(\sin S+\sin T+\sin V).$$

Vậy vế phải đúng bằng vế trái.

Bài 8

a) Ta có $\sin D\le 1$ và do $\cos E+\cos F=2\cos\frac{E+F}{2}\cos\frac{E-F}{2}>0$ nên

$\sin D(\cos E+\cos F)\le\cos E+\cos F$ (dấu = xảy ra khi $D=90^\circ$).

Tương tự:

$\sin E(\cos D+\cos F)\le\cos D+\cos F$ (dấu = xảy ra khi $E=90^\circ$).

$\sin F(\cos D+\cos E)\le\cos D+\cos E$ (dấu = xảy ra khi $F=90^\circ$).

Từ ba bất đẳng thức trên suy ra:

$\sin(D + E) + \sin(D + F) + \sin(E + F) < 2(\cos D + \cos E + \cos F)$,
hay $\sin D + \sin E + \sin F < 2(\cos D + \cos E + \cos F)$ (*)

Do $\cos D + \cos E + \cos F = 1 + 4\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2} > 0$ nên từ (*) ta được bất đẳng thức:

$$\frac{\sin D + \sin E + \sin F}{\cos D + \cos E + \cos F} < 2.$$

b) Ta có: $\cos D\cos E\cos F \geq 0$ nên:

$\sin^2 D + \sin^2 E + \sin^2 F = 2(1 + \cos D\cos E\cos F) \geq 2$, hay

$\sin^2 D + \sin^2 E \geq 2 - \sin^2 F$ (1)

Vì $\sin D\sin E \geq \sin D\sin E - \cos D\cos E = \cos F$ nên:

$\sin^2 D.\sin^2 E \geq 1 - \sin^2 F$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$(1 + \sin^2 D)(1 + \sin^2 E) \geq 1 + (2 - \sin^2 F) + (1 - \sin^2 F)$, hay

$(1 + \sin^2 D)(1 + \sin^2 E) \geq 2(2 - \sin^2 F)$.

Suy ra:

$(1 + \sin^2 D)(1 + \sin^2 E)(1 + \sin^2 F) \geq 2(2 - \sin^2 F)(1 + \sin^2 F)$;

$(1 + \sin^2 D)(1 + \sin^2 E)(1 + \sin^2 F) \geq 2(2 + \sin^2 F - \sin^4 F)$.

Do $\sin^2 F - \sin^4 F \geq 0$ nên ta suy ra bất đẳng thức:

$(1 + \sin^2 D)(1 + \sin^2 E)(1 + \sin^2 F) > 4$.

Bài 9

a) Hệ thức đã cho có thể viết:

$$\sin M = \frac{\sin\frac{N+P}{2}\cos\frac{N-P}{2}}{\cos\frac{N+P}{2}\cos\frac{N-P}{2}}, \text{ hay } 2\sin\frac{M}{2}\cos\frac{M}{2} = \frac{\cos\frac{M}{2}}{\sin\frac{M}{2}},$$

tức là $(2\sin^2\frac{M}{2} - 1)\cos\frac{M}{2} = 0$.

Từ đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \sin^2\frac{M}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{M}{2} = 0. \end{array}\right.$

Giải ra được:

- $\sin\frac{M}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $\frac{M}{2} = \frac{\pi}{4}$ vậy $M = \frac{\pi}{2}$, do đó ΔMNP vuông tại M;
- $\frac{M}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên $M = \pi$ (loại).

b) Hệ thức đã cho có thể viết:

$\sin N = 2\cos M\sin P$, hay $\sin(M + P) = 2\cos M\sin P$;

$\sin M\cos P + \cos M\sin P = 2\cos M\sin P$;

$\sin M\cos P - \cos M\sin P = 0$, hay

$\sin(M - P) = 0$.

Suy ra $M - P = 0$, tức là $M = P$. Vậy tam giác MNP cân tại N.

Bài 10

a) Hệ thức đã cho có thể biến đổi như sau:

$8\cos D\cos E\cos F = 1$, hay

$4\cos D\,[\cos(E + F) + \cos(E - F)] = 1$;

$4\cos D\,[-\cos D + \cos(E - F)] = 1$, hay

$4\cos^2 D - 4\cos D\cos(E - F) + 1 = 0$.

Biến đổi tiếp bằng cách thêm và bớt số $\cos^2(E - F)$ được:

$4\cos^2 D - 4\cos D\cos(E - F) + \cos^2(E - F) + 1 - \cos^2(E - F) = 0$, hay

$[2\cos D - \cos(E - F)]^2 + \sin^2(E - F) = 0$.

Từ đó ta có: $\begin{cases} 2\cos D - \cos(E - F) = 0, \text{ suy ra } \cos D = \frac{1}{2}, \text{ vậy } D = 60^\circ \\ \sin(E - F) = 0, \text{ suy ra } E = F. \end{cases}$

Vậy $D = E = F = 60^\circ$ và tam giác DEF đều.

b) Hệ thức đã cho có thể viết

$\tan E\sin^2 F = \tan F\sin^2 E$, hay $\frac{\sin E\sin^2 F}{\cos E} = \frac{\sin F\sin^2 E}{\cos F}$.

Vì sinE và sinF đều dương nên suy ra:

$\frac{\sin F}{\cos E} = \frac{\sin E}{\cos F}$, hay $\sin E\cos E = \sin F\cos F$; suy ra:

$\sin 2E = \sin 2F$.

từ đó: $\left[\begin{array}{l}2E = 2F\\ 2E = \pi - 2F\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}E = F\\ E + F = \dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.$

Điều này chứng tỏ rằng tam giác DEF cân tại D hoặc vuông tại D.

Bài 11

a) Biến đổi hệ thức đã cho như sau:

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 B}{\sin^2 B} - \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}, \text{ hay}$$

$$\frac{\cos^2 B\sin^2 A - \cos^2 A\sin^2 B}{\sin^2 A(\sin^2 A + \sin^2 B)} = \frac{\cos^2 B\sin^2 A - \cos^2 A\sin^2 B}{\sin^2 B(\sin^2 A + \sin^2 B)}.$$

Suy ra:

- $0 = \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B$
  $= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$
  $= \sin(A + B)\sin(A - B)$
  $= \sin C\sin(A - B)$.

Từ đó ta có: $\sin(A - B) = 0$.

- $\sin^2 A = \sin^2 B$, suy ra $1 - \cos 2A = 1 - \cos 2B$. Như thế:

$0 = \cos^2 A - \cos^2 B = -2\sin(A + B)\sin(A - B)$
$= -2\sin C\sin(A - B)$.

Từ đó ta có: $\sin(A - B) = 0$.

Vậy ta được: $A - B = k\pi$. Nhưng $|A - B| < \pi$ nên ta chỉ có thể chọn $k = 0$. Suy ra $A = B$, tức là tam giác ABC cân tại C.

b) Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$$= 4p^2 - 2(ab + bc + ca) \qquad (1)$$

Lại có: $2(p^2 - r^2 - 4Rr) = 2p^2 - 2(r^2 + 4Rr)$

$$= 2p^2 - 2\left(\frac{S^2}{p^2} + 4.\frac{abc}{4S}\right) = 2p^2 - \frac{2S^2}{p^2} - \frac{2abc}{p}$$

$$= 2p^2 - 2\frac{(p - a)(p - b)(p - c) + abc}{p} = 4p^2 - 2(ab + bc + ca) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2(p^2 - r^2 - 4Rr) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Đối chiếu với giả thiết ta có:

$ab + bc + ca = (a^2 + b^2 + c^2)$. Suy ra $a = b = c$,

tức là tam giác ABC đều.

Bài 12

a) Ta biến đổi:

$$\sin^2 D - \sin^2 E = \frac{1}{2}(1 - \cos 2D) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2E)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2E - \cos 2D) = \sin(D + E)\sin(D - E) = \mathbf{\sin F \sin(D - E)}.$$

Như thế theo điều kiện đã cho ta có:

$\sin F \sin(D - E) = \sin E \sin F$

hay do $\sin F > 0$ thì $\sin(D - E) = \sin E$.

Nếu $D = 2E$ thì $\sin(D - E) = \sin(2E - E) = \mathbf{\sin E}$ **(*)**

Ngược lại nếu có (*) thì:

- $D - E = E + k.2\pi$. Từ đó $D = 2E + k.2\pi$. Với **k nguyên chỉ có k =** 0 là thích hợp. Ta có: $D = 2E$.
- $D - E = \pi - E + k.2\pi$. Từ đó $D = \pi + k.2\pi$ (loại).

b) Từ điều kiện thứ nhất $\sin D + \sin E = 2\sin F$, **ta có:**

$$2\sin\frac{D+E}{2}\cos\frac{D-E}{2} = 2\sin F = 2\sin(D+E) = \mathbf{4\sin\frac{D+E}{2}\cos\frac{D+E}{2}}.$$

Suy ra

$$\cos\frac{D-E}{2} = 2\cos\frac{D+E}{2}\left(\text{vì } 0 < \frac{D+E}{2} < 90^0 \text{ nên } \mathbf{\sin\frac{D+E}{2} > 0}\right).$$

Từ điều kiện thứ hai $\tan D + \tan E = 2\tan F$, **ta có:**

$$\tan D + \tan E = \frac{\sin D}{\cos D} + \frac{\sin E}{\cos E} = \frac{\sin(D+E)}{\cos D\cos E}$$

$$= 2\tan F = 2.\frac{\sin(D+E)}{-\cos(D+E)} \text{ hay}$$

$-\cos(D + E) = 2\cos D\cos E$, tức là:

$-\cos D\cos E + \sin D\sin E = 2\cos D\cos E$;

$\sin D\sin E = 3\cos D\cos E$; $\cos(D - E) - \cos\mathbf{(D + E)}$

$= 3[\cos(D - E) + \cos(D + E)]$, hay $\cos(D - E) + 2\cos(D + E) = 0$.

Suy ra: $2\cos^2\dfrac{D-E}{2} - 1 + 4\cos^2\dfrac{D+E}{2} - 2 = 0$, hay

$2\cos^2\dfrac{D-E}{2} + 4\cos^2\dfrac{D+E}{2} - 3 = 0$.

Thay $\cos\dfrac{D-E}{2} = 2\cos\dfrac{D+E}{2}$ vào đẳng thức cuối được:

$12\cos^2\dfrac{D+E}{2} - 3 = 0$, hay $\cos^2\dfrac{D+E}{2} = \dfrac{1}{4}$, vậy

$\cos\dfrac{D+E}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\text{vì } 0^\circ < \dfrac{D+E}{2} < 90^\circ\right)$

Suy ra $\dfrac{D+E}{2} = 60^\circ$ hay $D + E = 120^\circ$, từ đó $F = 60^\circ$.

Lại có $\cos\dfrac{D-E}{2} = 2\cos\dfrac{D+E}{2} = 1$ nên $\dfrac{D-E}{2} = 0$.

Từ đó $D = E = 60^0$.

Vậy tam giác DEF đều.

Bài 13

a) Biến đổi hệ thức đã cho thành:

$\tan A + \tan B = \tan B(\tan A\tan B - 1)$.

Do $\tan A + \tan B \neq 0$ (vì nếu $\tan A = -\tan B$ thì suy ra $A = -B + k\pi$, với k nguyên, hay $A + B = k\pi$ mà $0 < A + B < \pi$, vô lí !), nên $\tan A\tan B - 1 \neq 0$, ta có:

$\tan B = \dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A\tan B - 1} = -\tan(A + B) = \tan C$.

Suy ra $B = C + k\pi$. Và các góc B và C phải có điều kiện là $< \pi$ nên chỉ có thể chọn $k = 0$. Vậy $B = C$ và tam giác ABC cân tại A.

b) Hệ thức đã cho có thể biến đổi như sau:

$\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C =$

$2\sin 3(A + B)\cos 3(A - B) + \sin 6C$, hay

$2\sin 3C\cos 3(A - B) + 2\sin 3C\cos 3C = 0$; suy ra:

$2\sin 3C[\cos 3(A - B) - \cos 3(A + B)] = 0$;

tức là 4sin3Asin3Bsin3C = 0.

Như thế phải có ít nhất một trong ba số sin3A, sin3B hoặc sin3C bằng 0. Chẳng hạn:

sin3A = 0 thì $3A = k\pi, A = \frac{k\pi}{3}$. Rõ ràng chỉ có k = 2, k = 1 là thích hợp.

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60° hoặc 120°.

Bài 14

a) Biến đổi vế trái thành một tích:

$$\sin 5M + \sin 5N + \sin 5P = 2\sin\frac{5(M+N)}{2}\cos\frac{5(M-N)}{2}$$

$$+\sin 5(M+N) = 2\sin\frac{5(M+N)}{2}\left[\cos\frac{5(M-N)}{2} + \cos\frac{5(M+N)}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{5(M+N)}{2}.2.\cos\frac{5M}{2}\cos\frac{5N}{2} = 4\cos\frac{5M}{2}\cos\frac{5N}{2}\cos\frac{5P}{2}.$$

Hệ thức đã cho trở thành:

$$\cos\frac{5M}{2}.\cos\frac{5N}{2}.\cos\frac{5P}{2} = 0.$$

Như thế phải có ít nhất một trong 3 số $\cos\frac{5M}{2}, \cos\frac{5N}{2}, \cos\frac{5P}{2}$ bằng 0, chẳng hạn:

Nếu $\cos\frac{5M}{2} = 0$ thì $\frac{5M}{2} = 90^\circ + k.180^\circ$. Do $0^\circ < \frac{5M}{2} < 450^\circ$ ta có hoặc $\frac{5M}{2} = 90^\circ$ tức là $M = 36^\circ$, hoặc $\frac{5M}{2} = 270^\circ$ tức là $M = 108^\circ$.

Vậy tam giác MNP phải có ít nhất một góc bằng 36° hoặc 108°.

b) Hệ thức đã cho $\sin M + \sin N \geq 2\sin P$ có thể viết $m + n \geq 2p$ $\left(\text{vì } \frac{m}{\sin M} = \frac{n}{\sin N} = \frac{p}{\sin P}\right)$. Do đó hoặc $p \leq m$ hoặc $p \leq n$, tức là hoặc $P \leq M$ hoặc $P \leq N$. Suy ra góc P phải nhọn, nên cos P > 0.

Ta có thể bình phương hai vế của các hệ thức đã cho:

$$\sin^2 M + \sin^2 N + 2\sin M \sin N \geq 4\sin^2 P$$

$\cos^2 M + \cos^2 N + 2\cos M \cos N \geq 4\cos^2 P$.

Cộng từng vế hai bất đẳng thức được:

$\cos(M - N) \geq 1$, từ đó $\cos(M - N) = 1$, suy ra $M = N$.

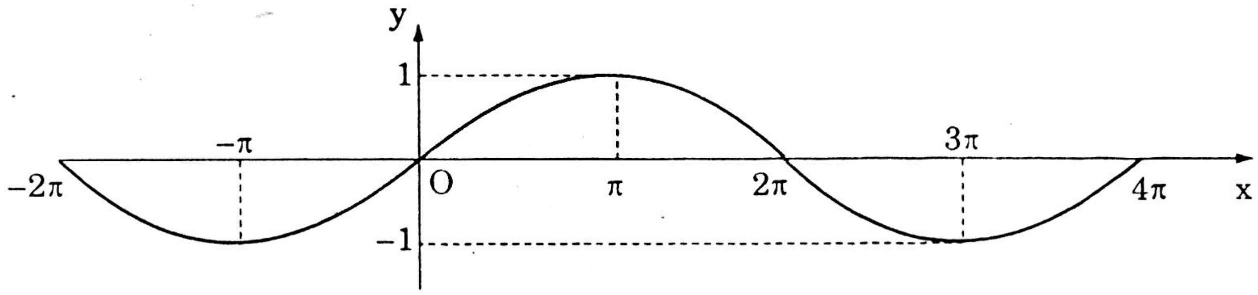
Vậy $\sin M = \sin N = \sin P$, suy ra $m = n = p$ và tam giác MNP đều.

Bài 15

a) Hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì là 4π.

Đồ thị như ở hình 12.

x	0	π	2π	3π	4π
$y = \sin\frac{x}{2}$	0	1	0	-1	0

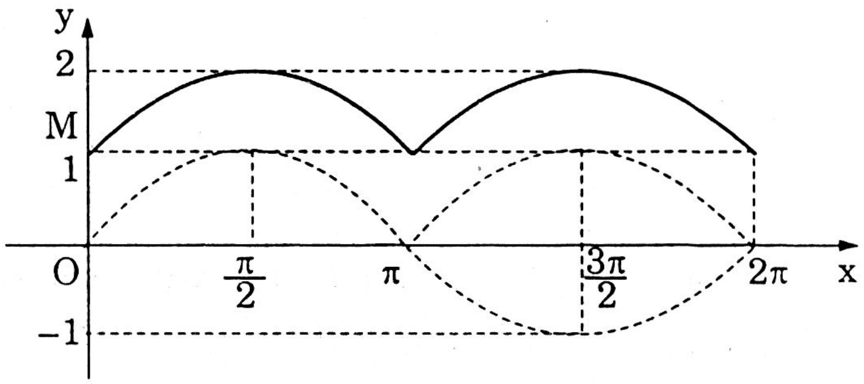


Hình 12

b) Hàm số $y = 1 + |\sin x|$ tuần hoàn với chu kì là 2π.

Muốn vẽ đồ thị của nó ta làm như sau:

- Vẽ đồ thị $y = \sin x$.
- Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm dưới trục hoành.
- Tịnh tiến đồ thị theo vectơ $\overrightarrow{OM}$ với $M(0; 1)$ (Hình 13)



Hình 13

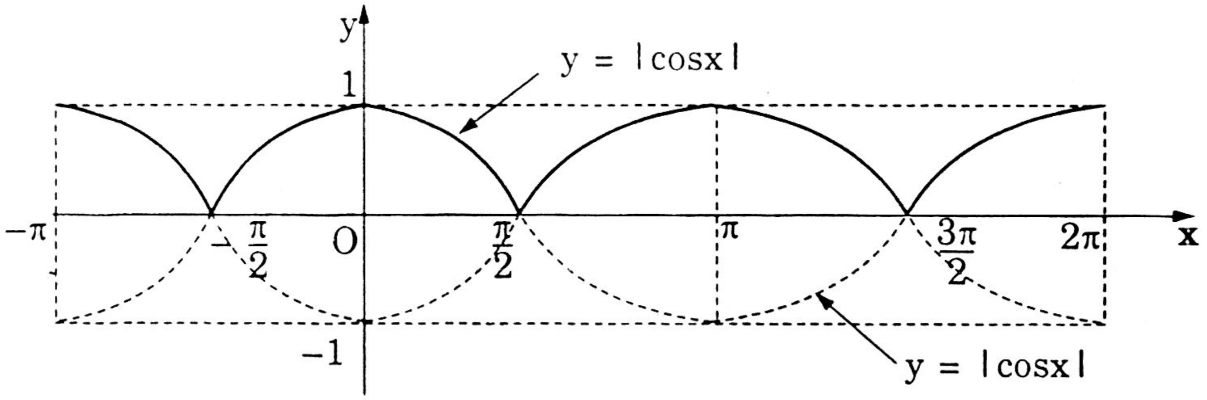
Bài 16

a) Hàm số $y = |\cos x|$ tuần hoàn với chu kì là 2π.

Muốn vẽ đồ thị của nó ta làm như sau:

- Vẽ đồ thị $y = \cos x$.

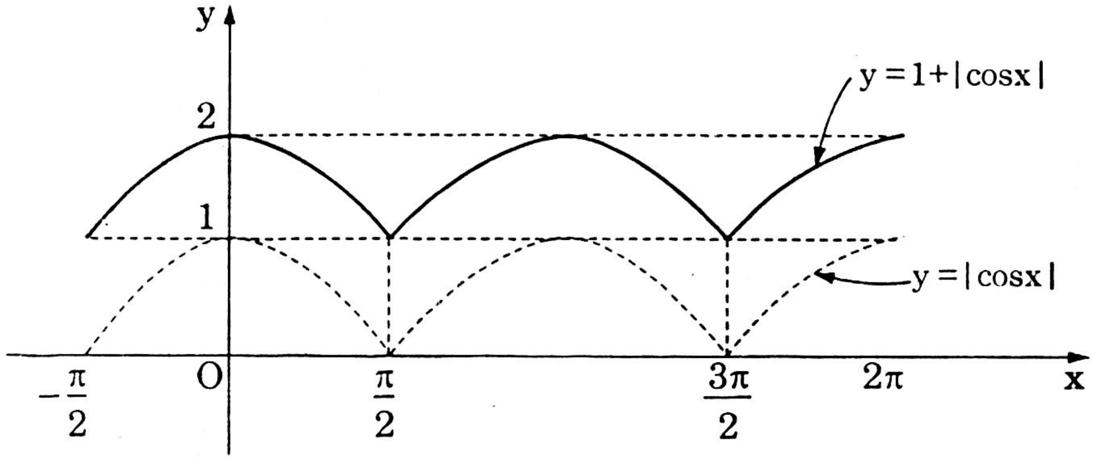
- Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm dưới trục hoành (Hình 14).



Hình 14

b) Hàm số $y = 1 + |\cos x|$ tuần hoàn với chu kì là 2π.

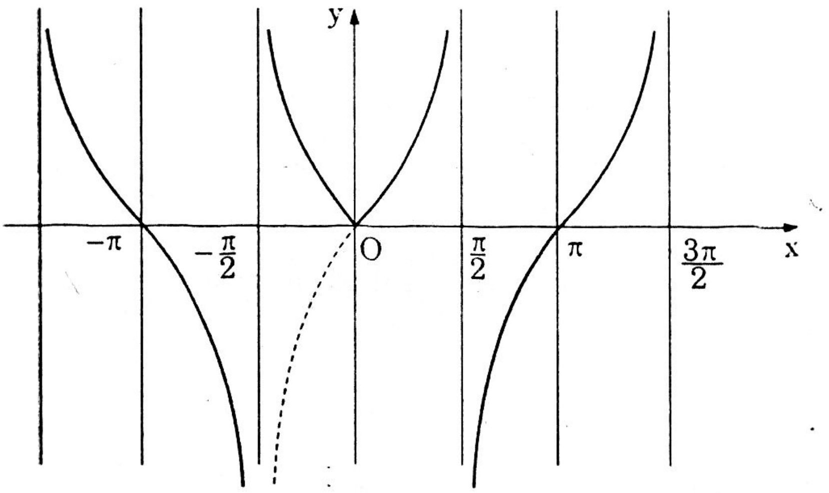
Để vẽ đồ thị của nó thì từ đồ thị $y = |\cos x|$ ở trên ta tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OM}$ với M(0 ; 2) (Hình 15)



Hình 15

Bài 17

a) Hàm số $y = |\tan x|$ tuần hoàn với chu kì là π.



Hình 16

Muốn vẽ đồ thị của nó ta làm như sau:

- **Vẽ đồ thị** y = tanx.

- **Trong khoảng** mà $x \geq 0$ thì đồ thị của y = | tanx | là đồ thị của **y = tanx** trong khoảng đó. Trong khoảng mà $x < 0$ thì đồ thị của **y = | tanx |** là đồ thị của y = −tanx, tức là đối xứng của đồ thị **y = tanx** qua trục hoành (hình 16)

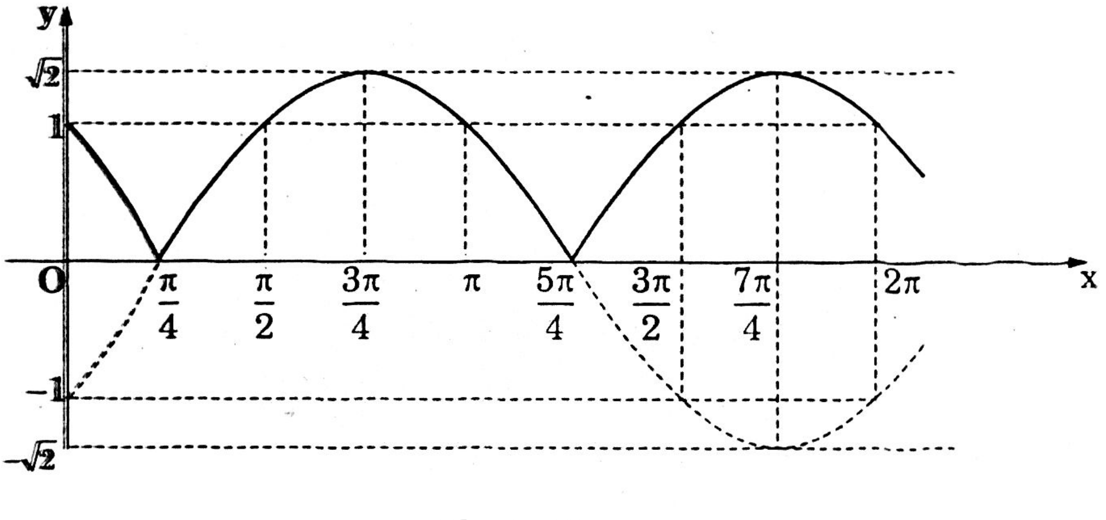
b) **Hàm số y =** | sinx − cosx | tuần hoàn với chu kì là 2π.

Muốn vẽ đồ thị của nó ta làm như sau:

- **Vẽ đồ thị** y = sinx − cosx.

- **Lấy đối** xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm dưới trục hoành **(hình 17)**

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sinx − cosx	−1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	−1	$-\sqrt{2}$	−1
| sinx - cosx |	1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	1	$\sqrt{2}$	1



Hình 17

D. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 18. Chứng minh rằng trong tam giác DEF ta có các hệ thức sau:

a) $\tan\frac{D}{2}\tan\frac{E}{2}+\tan\frac{E}{2}\tan\frac{F}{2}+\tan\frac{F}{2}\tan\frac{D}{2}=1$;

b) $\sin 2D+\sin 2E+\sin 2F=4\sin D.\sin E.\sin F$.

Bài 19. Cho tam giác DEF vuông tại D. Kẻ phân giác EG của góc E, chứng minh hệ thức:

$\tan\frac{E}{2}=\frac{e}{d+f}$ (d, e, f là độ dài các cạnh của tam-giác).

Bài 20. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (D ; r), chứng minh rằng:

$$\frac{DA^2}{bc}+\frac{DB^2}{ca}+\frac{DC^2}{ab}=1.$$

Bài 21. Các góc của tam giác MNP thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{\sin N+\sin P}{\sin M}=\frac{\sin 2N+\sin 2P}{\sin 2M}.$$

Chứng minh rằng: cosM + cosP = 1.

Bài 22. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác DEF đều là:

$$d + e + f = 2(d\cos D + e\cos E + f\cos F).$$

Bài 23. Nếu trong tam giác DEF ta có tanE = 2, tanF = 3 thì góc D bằng 45°. Chứng minh điều này.

Bài 24. Chứng minh rằng nếu cos3M + cos3N + cos3P = 1 thì tam giác MNP có một góc bằng 120°.

Bài 25. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\sin^2 x$;

b) $y=\tan^2 x$.

Bài 26. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\frac{1}{\cos x}$;

b) $y = 2^{\cos x}$.

ĐÁP SỐ

Bài 18

a) Từ $\frac{D}{2} + \left(\frac{E}{2} + \frac{F}{2}\right) = 90^0$ suy ra $\frac{1}{\tan\frac{D}{2}} = \cot\frac{D}{2} = \tan\left(\frac{E}{2} + \frac{F}{2}\right)$.

Bài 19

Vận dụng tính chất đường phân giác của một tam giác để suy ra đoạn $DE = \frac{ef}{d + f}$.

Bài 20

Hãy tính tỉ số $\frac{DA^2}{bc} = \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$ rồi vận dụng hệ thức ở câu a của bài 18.

Bài 21

Từ hệ thức đã cho hãy suy ra:

(sinN + sinP) cosM = sin (N + P).sin (N − P) rồi biến đổi để được

$2\cos\frac{N + P}{2}.\cos\frac{N - P}{2} - 1 = 0$.

Bài 22

Tính $d = 2R\sin D = 2R\sin(E + F) = e\cos F + f\cos E$, tương tự tính e và f để thay vào vế trái.

Bài 23

Vận dụng hệ thức tanD + tanE + tanF = tanD.tanE.tanF.

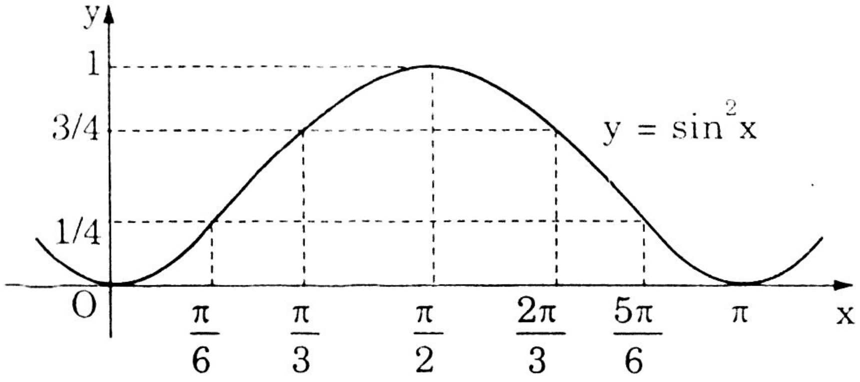
Bài 24

Đưa về tích (1 − cos3M) (1 − cos3N) (1 − cos3P) = 0.

Bài 25

Lập bảng biến thiên của $y = \sin^2 x$ là hàm số tuần hoàn chu kì π, từ 0 đến π và của $y = \tan^2\frac{x}{2}$ là hàm số chẵn từ −π đến π.

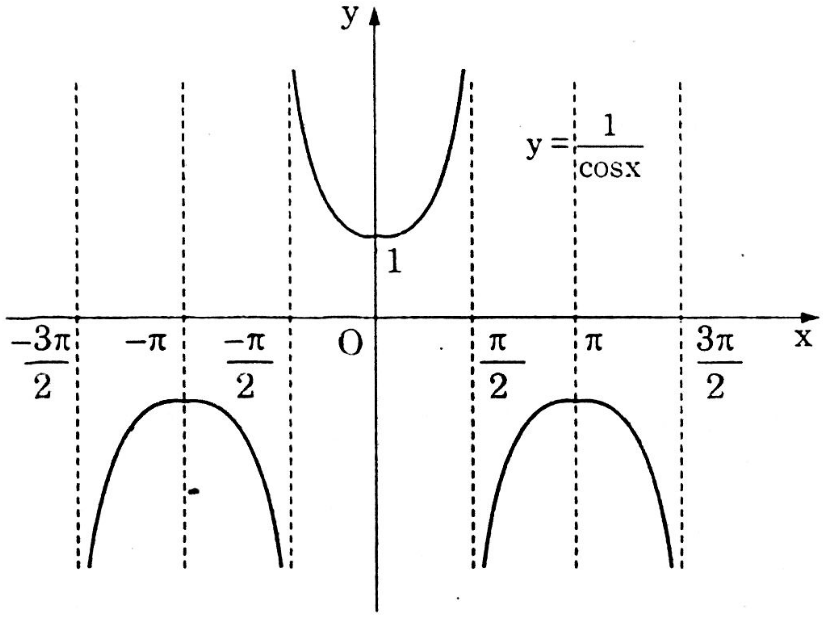
Đồ thị của $y = \sin^2 x$ có dạng như hình 18



• *Hình 18*

Bài 26

a) Hàm số tuần hoàn chu kì 2π. Đồ thị $y = \frac{1}{\cos x}$ có dạng như hình 19



Hình 19

b) Chỉ cần xét trong hai đoạn $[0 ; \pi]$ và $[\pi ; 2\pi]$.

E. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Chứng minh rằng giữa ba góc M, N, P của tam giác MNP biểu thức $\cos M + \cos N \cos P + \sin N \sin P$ có giá trị là một hằng số và bằng:

A. 1　　B. 4　　C. 0.

2. Biểu thức $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ giữa ba góc α, β, γ của một tam giác có giá trị bằng:

A. 2　　B. 1　　C. 3.

3. Đẳng thức nào đúng trong các góc của tam giác DEF:

A = sinD + sinE + sinF = 2sinDsinEsinF

B = sinD + sinE + sinF = $4\cos\frac{D}{2}\cos\frac{E}{2}\cos\frac{F}{2}$

C = sinD + sinE + sinF = 4cosDcosEcosF.

4. Chứng tỏ rằng giữa ba góc α, β, γ của một tam giác ta luôn có tổng $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2}-\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$ bằng một số không đổi.

A. 1 B. 3 C. 5.

5. Đẳng thức nào đúng trong tam giác MNP:

A = sinM – sinN – sinP = 4cosMcosNcosP

B = sinM – sinN – sinP = 1 – cosMcosBcosP

C = sinM – sinN – sinP = –4cosMcosNcosP.

6. Tổng các bình phương của sin ba góc trong tam giác DEF $\sin^2 D+\sin^2 E+\sin^2 F$ có giá trị bằng:

A. 2(1 + cosDcosEcosF)

B. 5(3 + cosDcosEcosF)

C. 2(2 + cosDcosEcosF).

7. Trong tam giác DEF hãy so sánh tổng ba cosin: $\cos D+\cos E+\cos F$ với số 1.

A. Lớn hơn 1 B. Bằng 1 C. Nhỏ hơn 1.

8. Chứng tỏ rằng trong tam giác RST, biểu thức

$\sin^2 S+\sin^2 T-2\sin S\sin T\cos R$ bằng:

A. $\sin^2 S$ B. $\sin^2 R$ C. $\sin^2 T$.

9. Trong tam giác RST đường cao TE cắt đường cao RD tại trung điểm H của RD. Tích $\tan S\cdot\tan T$ có giá trị bằng:

A. 5 B. 2 C. 3.

10. Biến đổi biểu thức tanD + tanE + tanF trong tam giác DEF thành một tích:

A. tanDtanEtanF

B. 2tanDtanEtanF

C. $\frac{1}{2}\tan D\tan E\tan F$.

11. Nếu trong tam giác PQR ta có tanQ = 2, tanR = 3 thì góc P có giá trị là:

A. 90° B. 60° C. 45°.

12. Nếu trong tam giác PQR ta có hệ thức $\sin\frac{P}{2} = \sin\frac{Q}{2}\sin\frac{R}{2}$ thì $\tan\frac{Q}{2}\tan\frac{R}{2}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2.

13. Giữa bình phương sin các góc của tam giác MNP có hệ thức $\sin^2 M + \sin^2 N + \sin^2 P = 2$ thì tam giác này là:

A. Tam giác nhọn B. Tam giác vuông C. Tam giác tù.

14. Xác định dạng của tam giác MNP nếu $\sin^2 M + \sin^2 N = 1 + \cos^2 P$:

A. Tam giác vuông B. Tam giác nhọn C. Tam giác tù.

15. Xác định dạng của tam giác DEF nếu sinD = 2sinEsinF:

A. Tam giác đều B. Tam giác cân C. Tam giác vuông.

16. Xác định dạng của tam giác MNP nếu cosMcosNcosP = $\frac{1}{8}$:

A. Tam giác đều B. Tam giác cân C. Tam giác vuông.

17. Xác định dạng của tam giác DEF nếu sin2D + sin2E + sin2F = 0:

A. Tam giác cân B. Tam giác đều C. Tam giác vuông.

18. Nếu tam giác PQR có hệ thức sinP + sinQ + sinR = sin2P + sin2Q + sin2R thì tam giác này:

A. Đều B. Vuông C. Cân.

19. Nếu tam giác PQR có một góc bằng 60° thì tổng sin3P + sin3Q + sin3R có giá trị là:

A. 1 B. 0 C. 3.

20. Tam giác DEF có một góc bằng 120° thì tích (1 – cos3D) (1 – cos3E) (1 – cos3F) có giá trị là:

A. 2 B. –1 C. 0.

Trả lời

1. Đáp án C
2. Đáp án B
3. Đáp án B
4. Đáp án A
5. Đáp án C
6. Đáp án A
7. Đáp án A
8. Đáp án B
9. Đáp án B
10. Đáp án A
11. Đáp án C
12. Đáp án A
13. Đáp án B
14. Đáp án A
15. Đáp án B
16. Đáp án A
17. Đáp án C
18. Đáp án A
19. Đáp án B
20. Đáp án C

Dạng toán 5

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất ta có thể dùng các phương pháp sau:

a) Ứng dụng các tính chất định tính và định hình của tam thức bậc hai;

b) Xét điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm, tức là xét $\Delta \geq 0$;

c) Ứng dụng bất đẳng thức Côsi;

Ứng dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

“Cho 2n số tùy ý $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$. Khi đó ta luôn có:

$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$; tổng quát:

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + b_n^2)$”.

B. ĐỀ BÀI

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số theo giá trị của tham số a:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + a\sin x\cos x.$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \cos\frac{2y}{1+y^2} + \cos\frac{4y}{1+y^2} + 1.$$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \tan^2(x+\varphi) + \tan^2(x-\varphi)$$

trong đó φ là góc cho trước.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$y = \dfrac{\cos\alpha + 2\sin\alpha + 3}{2\cos\alpha - \sin\alpha + 4}$ trong khoảng $-\pi < \alpha < \pi$.

Bài 5. Cho hàm số $f(y) = |1 + 2\cos y| + |1 + 2\sin y|$.

Tìm f(y)max và f(y)min.

Bài 6. Cho hàm số $f(y) = \sqrt{\cos y} + \sqrt{\sin y}$.

Tìm f(y)max và f(y)min.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$f(z) = \sin z + 4\cos z$.

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$f(x, y) = |\sin x|\cos y + |\cos x|\sin y$.

Bài 9. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$M = \tan A.\tan B.\tan C$.

Bài 10. Cho phương trình bậc hai:

$x^2 - (3\sin\alpha - \cos\alpha)x - 4 - 4\cos 2\alpha = 0$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của bình phương các nghiệm của phương trình trên.

Bài 11. Cho hàm số $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)$.

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$Q = \sqrt{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} + \sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi}$.

Bài 14. Cho $f(t) = \sin^2 t.\cos^6 t$.

Tìm giá trị lớn nhất của f(t).

C. GỢI Ý PHƯƠNG PHÁP GIẢI - GIẢI

Bài 1. Hàm số đã cho có thể viết:

$$y = -\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{a}{2}\sin 2x + 1$$

hay $y = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{a}{2}t + 1$ (đặt $t = \sin 2x$) xác định trên đoạn [–1 ; 1].

Đây là một parabol có hoành độ $t_o = \frac{a}{2}$.

a) Nếu $-2 < a < 2$ hay $-1 < \left(\frac{a}{2}\right) = t_o < 1$ thì ta có:

$$y_{max} = y.\frac{a}{2} = 1 + \frac{a^2}{8}.$$

Nếu $0 < a < 2$ thì ta có $y_{min} = \frac{1-a}{2}$ và $-2 < a < 0$ thì lại có $y_{min} = \frac{1+a}{2}$.

b) Nếu $a \le -2$ hay $\frac{a}{2} = t_o \le -1$ ta có:

$$y_{max} = \frac{1-a}{2},\ y_{min} = \frac{1+a}{2}.$$

c) Nếu $a \ge 2$ hay $\frac{a}{2} = t_o \ge 1$ thì:

$$y_{max} = \frac{1+a}{2},\ y_{min} = \frac{1-a}{2}.$$

Bài 2. Đặt $t = \frac{2y}{1+y^2}$, ta có $-1 \le t \le 1$.

($t = -1$ khi $y = -1$ và $t = 1$ khi $y = 1$).

Lại đặt $z = \cos t$, ta có $\cos 1 \le z \le 1$ ($z = \cos 1$ khi $t = \pm 1$ và $z = 1$ khi $t = 0$).

Như thế ta có hàm số $f(z) = 2z^2 + z$ với $\cos 1 \le z \le 1$; trên đoạn $0 < \cos 1 \le z \le 1$ hàm số f(z) tăng, do đó:

A max = f(1) = 3 tại điểm y = 0;

$A\min = f(\cos 1) = 2\cos^2 1 + \cos 1$ tại điểm $y = \pm 1$.

Bài 3. Biểu thức đã cho có thể viết:

$$B = \tan^2(x+\varphi) + \tan^2(x-\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}[\tan(x+\varphi) + \tan(x-\varphi)]^2 + \frac{1}{2}[\tan(x+\varphi) - \tan(x-\varphi)]^2$$

$$= \frac{\sin^2 2x + \sin^2 2\varphi}{2\cos^2(x+\varphi)\cos^2(x-\varphi)} = \frac{2(\sin^2 2x + \sin^2 2\varphi)}{(\cos 2x + \cos 2\varphi)^2}.$$

Ta nhận thấy rằng tử đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sin 2x = 0$, khi đó $\cos 2x = \pm 1$, còn mẫu đạt giá trị lớn nhất bằng:

$(1+\cos 2\varphi)^2$ nếu $\cos 2\varphi \geq 0$ khi $\cos 2x = 1$ và bằng:

$(-1+\cos 2\varphi)^2 = (1-\cos 2\varphi)^2$ nếu $\cos 2\varphi \leq 0$ khi $\cos 2x = -1$. Do đó:

a) Nếu $\cos 2\varphi \geq 0$ thì: $\min B = \dfrac{2\sin^2 2\varphi}{(1+\cos 2\varphi)^2} = 2\tan^2\varphi$;

b) Nếu $\cos 2\varphi \leq 0$ thì: $\min B = \dfrac{2\sin^2 2\varphi}{(1-\cos 2\varphi)^2} = 2\cot^2\varphi$.

Bài 4. Đặt $\tan\dfrac{\alpha}{2} = t$, ta có $-\infty < t < +\infty$ và:

$$y = \frac{t^2+2t+2}{t^2-t+3}.$$

Biến đổi tiếp y như sau:

$$y(t^2-t+3) = t^2+2t+2, \text{ hay}$$

$$(y-1)t^2 - (y+2)t + 3y - 2 = 0 \qquad (*)$$

Hàm số y có giá trị bằng 1 khi $t = \dfrac{1}{3}$. Giả sử $y \neq 1$, muốn phương trình bậc hai (*) có nghiệm thì

$$\Delta = (y+2)^2 - 4(y-1)(3y-2) \geq 0$$

tức là $\Delta = 11y^2 - 24y + 4 \leq 0$, từ đó $\dfrac{2}{11} \leq y \leq 2$.

Vậy $y\max = 2$; $y\min = \dfrac{2}{11}$.

Bài 5. Nhận xét: Hàm số $f(y) > 0$ với mọi y. Ta xét:

$$M = f^2(y) = 6 + 4(\cos y + \sin y) + |1 + 2(\cos y + \sin y) + 4\sin y\cos y|.$$

Đặt $u = \cos y + \sin y$ với $|u| \le \sqrt{2}$, ta có:

$$M = 6 + 4u + 2|2u^2 + 2u - 1|.$$

Tam thức $2u^2 + 2u - 1 = 0$ khi $u_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, cả hai giá trị này của u đều thuộc đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

a) Với $-\sqrt{2} \le u \le \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \le u \le \sqrt{2}$ ta có:

$M = 6 + 4u + 2|2u^2 + 2u - 1| = 4u^2 + 8u + 4 = 4(u+1)^2$, như thế với u thuộc các đoạn nói trên và ta có với $M = f^2(y)$:

$$M\min = M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = (\sqrt{3}-1)^2;$$

$$M\max = M(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}+1)^2.$$

b) Với $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \le u \le \dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ ta có:

$M = 6 + 4u - 2(2u^2 + 2u - 1) = -4u^2 + 8$, như thế với u thuộc đoạn nói trên ta có với $M = f^2(y)$:

$$M\min = M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = (\sqrt{3}-1)^2;$$

$$M\max = M(0) = 8.$$

Tóm lại, trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ta suy ra:

$f(y)\max = 2(1+\sqrt{2})$; $f(y)\min = \sqrt{3} - 1$.

Bài 6. Nhận xét: ta có $f(y) \ge 0$ nên ta có thể xét

$$f^2(y) = \cos y + \sin y + 2\sqrt{\cos y \sin y} \quad \left(\text{với } 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Đặt $v = \cos y + \sin y = \sqrt{2}\cos\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)$, ta suy ra:

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \cos\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$, hay $1 \le v \le \sqrt{2}$.

Như thế: $f^2(y) = v + \sqrt{2v^2 - 2}$.

Với $1 \le v \le \sqrt{2}$ thì $f^2(y)$ đồng biến, do đó ta có:

$f^2(y)\min = f^2(1) = 1 \Rightarrow f(y)\min = 1$;

$f^2(y)\max = f^2(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} \Rightarrow f(y)\max = \sqrt[4]{8}$.

Bài 7. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta được:

$(\sin z + 4\cos z)^2 \le (1^2 + 4^2)(\sin^2 z + \cos^2 z) = 17$.

Suy ra: $-\sqrt{17} \le \sin z + 4\cos z \le \sqrt{17}$.

Vậy: $f(z)\max = \sqrt{17}$ đạt được khi $\sin z = \dfrac{1}{\sqrt{17}}, \cos z = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$;

$f(z)\min = -\sqrt{17}$, đạt được khi $\sin z = \dfrac{-1}{\sqrt{17}}, \cos z = \dfrac{-4}{\sqrt{17}}$.

Bài 8. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta được:

$(|\sin x|\cos y + |\cos x|\sin y)^2 \le (\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^2 y + \sin^2 y) = 1$.

Suy ra: $-1 \le |\sin x|\cos y + |\cos y|\sin y \le 1$.

Vậy ta có ngay:

$f(x,y)\max = 1$ đạt được khi $\begin{cases} \cos y = |\sin x| \\ \sin y = |\cos x| \end{cases}$.

$f(x,y)\min = -1$ đạt được khi $\begin{cases} \cos y = -|\sin x| \\ \sin y = -|\cos x| \end{cases}$.

Bài 9. Do tam giác ABC nhọn nên ta có $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, $\tan C > 0$ và $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$, hay

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C.$$

Suy ra $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có ngay:

$M = \tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} = 3\sqrt[3]{M}$.

Do đó: $M \ge 3\sqrt[3]{M}$, hay $M \ge 3\sqrt{3}$.

Vậy $M\min = 3\sqrt{3}$.

Bài 10. Phương trình bậc hai đã cho luôn có nghiệm vì tích

$$ac = -4(1 + \cos 2\alpha) = -8\cos^2\alpha \le 0.$$

Do đó ta có thể áp dụng các hệ thức Viet:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (3\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 8(1 + \cos 2\alpha) \\ &= 9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha + 8 + 8\cos 2\alpha \\ &= 13 + 4\cos 2\alpha - 3\sin 2\alpha = 13 + 5\cos(2\alpha + \beta) \end{aligned}$$

với $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$.

Vậy tổng $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị lớn nhất là 13 + 5 = 18 và giá trị nhỏ nhất là 13 – 5 = 8.

Bài 11. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \ge 2\sqrt{4} = 4.$$

Dấu = xảy ra kvck: $4^{\sin^2 x} = 4^{\cos^2 x}$, tức là khi $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số y là 4.

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số y ta xét hệ bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} 4^{\sin^2 x} - 1 \ge 0 \\ 4^{\cos^2 x} - 1 \ge 0 \end{cases}.$$

Nhân từng vế hai bất đẳng thức này được:

$$\left(4^{\sin^2 x} - 1\right)\left(4^{\cos^2 x} - 1\right) \ge 0, \text{ hay } 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \le 5.$$

Dấu = xảy ra kvck sinx = 0 hoặc cosx = 0. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là 5.

Bài 12. Biểu thức đã cho có thể viết:

$$P = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right), \text{ hay}$$

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + P - 1 = 0.$$

Ta được một phương trình bậc hai đối với $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Để phương trình này có nghiệm ta phải có:

$$\Delta' = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2(P-1) \geq 0,\ \text{hay}$$

$$2P \leq 2 + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 3. \text{Từ đó } P \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu = xảy ra kvck $\alpha = \beta = 60^o$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$.

Bài 13. Ta có thể viết:

$$Q^2 = 3 + 2[(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)]$$

$$\leq 3 + [\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi] = 6.$$

Vậy $Q \leq \sqrt{6}$, dấu = đạt được khi $\cos 2\varphi = 0$, tức là khi $\varphi = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$.

Bài 14. Ta viết hàm số đã cho như sau:

$$f(t) = 27.\sin^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{3}\right)^3 \leq 27\left(\frac{\sin^2 t + \frac{\cos^2 t}{3} + \frac{\cos^2 t}{3} + \frac{\cos^2 t}{3}}{4}\right)^4 = \frac{27}{256}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của f(t) là $\frac{27}{256}$.

D. BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 15. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số theo giá trị của các tham số m và n:

$$y = m\sin^4\varphi + n\cos^4\varphi.$$

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = (2 + \sin\alpha)(6 - \sin\alpha)$;

b) $y = \dfrac{1}{\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1}$.

Bài 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^2\beta + \frac{1}{\sin^2\beta} - \sin\beta - \frac{1}{\sin\beta}\,(0 < \beta < \pi).$$

Bài 18. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi} - \sin^2\varphi - \frac{1}{\sin^2\varphi}\,(0 < \varphi < \pi).$$

Bài 19. Cho hàm số:

$$f(\alpha, \beta) = \sin^2(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta).$$

Tìm $f(\alpha, \beta)$ max và $f(\alpha, \beta)$ min.

Bài 20. Cho hàm số

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{1 + \tan\alpha\tan\beta} + \sqrt{1 + \tan\beta\tan\gamma} + \sqrt{1 + \tan\gamma\tan\alpha}$$

với α, β, γ đều không âm và $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Tìm $f(\alpha, \beta, \gamma)$ max.

ĐÁP SỐ

Bài 15. Giá trị lớn nhất bằng m, đạt được khi $\cos^2\varphi = 0$. Giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{mn}{m+n}$, đạt được khi $\cos^2\varphi = \frac{m}{m+n}$.

Bài 16

a) Giá trị lớn nhất bằng 15, giá trị nhỏ nhất bằng 5.

b) Giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$, giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Bài 17. Giá trị nhỏ nhất bằng 0

Bài 18. Giá trị lớn nhất bằng −2.

Bài 19. Đưa $f(\alpha, \beta)$ về dạng $f(\alpha, \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta[2 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)]$.

Đáp số là: $f(\alpha, \beta)$ max = 1; $f(\alpha, \beta)$ min = −1.

Bài 20. Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki. Đáp số: $f(\alpha, \beta, \gamma) = 2\sqrt{3}$.

BẠN CÓ BIẾT ?

BUNHIACÔPXKI

(Victor Iakovlevitch Bouniakobski)

Nói đến bất đẳng thức quan trọng trong đại số, ta thường nhắc tới và vận dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki sau đây:

"Với 2n số bất kỳ $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có bất đẳng thức:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, ..., a_n = kb_n"$$

Nhà toán học Nga Bunhiacôpxki sinh ngày 16-12-1804 là viện sĩ Viện hàn lâm Pêtecbua từ khi mới 24 tuổi và sau này trở thành phó chủ tịch của Viện từ năm 1864 cho tới năm 1889 là năm ông mất. Ông mất ngày 12-12-1889.

Từ năm 16 tuổi đến năm 21 tuổi ông đã theo học ở Pari, lúc đó có nhiều giáo sư nổi tiếng dạy như Laplaxơ, Phuriê, Côsi, Lơgiăngdrơ. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ toán ở Pari vào năm 1825 lúc ông mới 21 tuổi.

Trở về nước, ở Pêtecbua ông đã hoạt động tích cực trong lĩnh vực giáo dục, giảng dạy toán cho đến năm 1846. Trong 15 năm sau từ 1846 đến 1889 ông dạy tại trường Đại học Pêtecbua, phụ trách các môn cơ học giải tích, lí thuyết xác suất và giải tích toán học.

Từ năm 1858 ông trở thành chuyên gia quan trọng của chính phủ về các vấn đề thống kê và bảo hiểm.

Ông đã có đến 168 công trình nghiên cứu trên rất nhiều lĩnh vực của toán học. Công trình đặc biệt của ông là "Cơ sở lí thuyết xác suất" (1846). Đối với nhà trường trung học phổ thông ông đã viết cuốn sách giáo khoa "Số học" (1844) và cuốn "Chương trình và tóm tắt môn số học" (1849).

Viện hàn lâm khoa học Pêtecbua đã đặt ra giải thưởng mang tên ông cho những tác phẩm toán học có giá trị lớn.

E. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^3 2\alpha$

A. $y_{max} = \frac{1}{2}$, $y_{min} = -\frac{1}{2}$

B. $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$

C. $y_{max} = \frac{2}{3}$, $y_{min} = -2$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{4}\sin 4\beta$.

A. $y_{max} = \frac{3}{4}$, $y_{min} = -\frac{3}{4}$

B. $y_{max} = \frac{1}{2}$, $y_{min} = -\frac{1}{2}$

C. $y_{max} = \frac{2}{3}$, $y_{min} = -\frac{2}{3}$

3. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos\varphi + \cos 3\varphi)$. Tìm y_{max} và y_{min}.

A. $y_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$

C. $y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Cho hàm số $y = \frac{1 + 3\cos^2 2\alpha}{4}$. Tìm y_{max} và y_{min}.

A. $y_{max} = 1$, $y_{min} = \frac{1}{4}$

B. $y_{max} = 2$, $y_{min} = \frac{1}{2}$

C. $y_{max} = -1$; $y_{min} = -\frac{1}{4}$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{8}\cos 4\beta + \frac{5}{8}$

A. $y_{max} = 1$, $y_{min} = \frac{1}{2}$

B. $y_{max} = 1$, $y_{min} = \frac{1}{4}$

C. $y_{max} = \sqrt{2}$, $y_{min} = -\sqrt{2}$.

6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \cos\varphi(1 + 2\cos 2\varphi)$.

A. $y_{max} = 3$, $y_{min} = -3$

B. $y_{max} = 2$, $y_{min} = -2$

C. $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$.

7. Cho hàm số $y = \sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Tìm y_{max} và y_{min}.

A. $y_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$

C. $y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Cho hàm số $y = \frac{2(\sin^2 2m + \sin^2 2\beta)}{(\cos 2\beta + \cos 2m)^2}$ trong đó m là góc cố định và $\cos 2m \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

A. $y_{min} = \tan^2 m$ B. $y_{min} = 2\tan^2 m$ C. $y_{min} = 2\cot^2 m$.

9. Cho $f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x \sin y}$ với x và y nhọn. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f(x, y).

A. $f_{max} = 1$, $f_{min} = -1$

B. $f_{max} = 2$, $f_{min} = -2$

C. $f_{max} = 3$, $f_{min} = -3$.

10. Cho $f(z,t) = 2\cos z\cos t\left[2 - (\cos^2 z + \cos^2 t)\right]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f(z, t).

A. $f_{max} = -1$, $f_{min} = -1$

B. $f_{max} = 2$, $f_{min} = 2$

C. $f_{max} = 1$, $f_{min} = 1$.

Trả lời

1. Đáp án B

2. Đáp án A

3. Đáp án C

4. Đáp án A

5. Đáp án B

6. Đáp án A

7. Đáp án C

8. Đáp án B

9. Đáp án A

10. Đáp án C

Dạng toán 6

TOÁN LƯỢNG GIÁC CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1) Diện tích tam giác

$S = \frac{ah}{2}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = \frac{ab\sin C}{2}$

Diện tích tam giác đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Diện tích hình thoi S = b.h ; $S = \frac{d_1.d_2}{2}$ (d_1 và d_2 là đường chéo)

Diện tích hình thang $S = \frac{a+b}{2}.h$; $S = m.h$ (m là đường trung bình)

Diện tích đa giác đều: $S = \frac{P.a}{2}$ (P là chu vi, a là trung đoạn)

Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ (d là đường kính)

Diện tích hình quạt: $S = \frac{R.l}{2} = \frac{R^2.\alpha}{2} = \frac{\pi R^2.a}{360}$ (a là độ đo cung hình quạt, α là độ đo bằng radian, *l* là độ dài cung hình quạt).

2) Diện tích xung quanh

Hình lăng trụ: $S_{xq} = P.l$ (P là chu vi thiết diện vuông góc, *l* là cạnh bên)

Hình chóp: $S_{xq} = \frac{P.a}{2}$ (P là chu vi đáy, a là trung đoạn)

Hình chóp cụt: $S_{xq} = \frac{P_1 + P_2}{2}.a$ (P_1 và P_2 là chu vi hai đáy, a là trung đoạn)

Hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R.h$

Hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$ (*l* là đường sinh)

Mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

3) Thể tích

Hình lăng trụ: $V = B.h$

Hình chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$

Hình chóp cụt: $V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$

Hình trụ: $V = \pi R^2 h$

Hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Hình nón cụt: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

Hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^2$.

4) Để tìm được các biểu thức lượng giác cần:

- Vận dụng các kiến thức lượng giác

(thuộc các dạng 1, 2, 3 và 4)

- Biến đổi biểu thức cuối cùng thành một tích

(chẳng hạn khi tìm được $S = \frac{a^2 \cot\beta}{\sin\alpha}(1 + \sin\beta)$ thì phải biến đổi tiếp $1 + \sin\beta = 2\cos^2(45^\circ - \frac{\beta}{2})$ để được biểu thức cuối cùng là

$$S = \frac{2a^2 \cot\beta \cos^2(45^\circ - \frac{\beta}{2})}{\sin\alpha}).$$

B. ĐỀ BÀI

Liên quan đến tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại B có góc B bằng α. Tính tỉ số các bán kính của đường tròn ngoại tiếp R và đường tròn nội tiếp r.

Bài 2. Góc ở đỉnh C của tam giác ABC với các cạnh bên a và b ($a < b$) được chia thành 3 phần bằng nhau tại D và E trên cạnh đối AB. Biết tỉ số $\frac{CE}{CD} = \frac{m}{n}$ ($m < n$). Tính độ dài các đoạn CE và CD.

Bài 3. Cho tam giác ABC có các đường cao AA', BB', CC'. Tính tỉ số diện tích diện tích các tam giác A'B'C' và ABC theo các góc A, B, C của tam giác (Xét ba trường hợp: ΔABC nhọn, ΔABC tù và ΔABC vuông).

Bài 4. Tính các góc của một tam giác vuông biết tỉ số giữa các bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp bằng $\frac{5}{2}$.

Bài 5. Chứng minh rằng trong tam giác ABC độ dài phân giác góc A được biểu thị bằng công thức $m_a = \dfrac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Áp dụng để chứng minh rằng độ dài cạnh lớn ứng với độ dài phân giác bé hơn.

Bài 6. Trong tam giác vuông ABC, cạnh góc vuông AC gấp ba lần cạnh góc vuông AB. Các điểm trên K và F chia cạnh AC thành ba phần bằng nhau. Chứng minh rằng.

$$\widehat{AKB} + \widehat{AFB} + \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}.$$

Bài 7. Chứng minh rằng trong một tam giác bất kì, tỉ số giữa các bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp không vượt quá $\frac{1}{2}$, tức là $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$.

Liên quan đến tứ giác

Bài 8. Tính các góc của hình bình hành ABCD biết độ dài hai đường cao $BM = h_1$, $BN = h_2$ và chu vi 2p.

Bài 9. Trong hình thang ABCD, các góc A và D thuộc đáy lớn bằng α và β. Tính bán kính đường tròn nội tiếp hình thang biết diện tích hình thang bằng Q.

Bài 10. Cho hình thoi ABCD cạnh a có góc A bằng 60^o và đường tròn (O) nội tiếp. Tính diện tích hình chữ nhật có các đỉnh là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh hình thoi.

Bài 11. Một hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong một hình chữ nhật khác EFGH và có diện tích bằng m^2. Với giá trị nào của m thì bài toán giải được?

Bài 12. Chứng minh rằng nếu các đường chéo của hai tứ giác tương ứng bằng nhau và vuông góc với nhau thì hai tứ giác này phải có diện tích bằng nhau.

Liên quan đến đường tròn

Bài 13. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền AB = c và góc nhọn A bằng α. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài 14. Trong hình quạt bán kính R và góc ở tâm (O) bằng α có đường tròn nội tiếp (O'). Tính bán kính đường tròn nội tiếp này.

Bài 15. Cho hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại M có đoạn nối tâm $O_1O_2 = d$ và góc giữa hai tiếp tuyến chung bằng φ. Tính các bán kính r_1 và r_2 của chúng.

Liên quan đến hình lăng trụ và hình hộp

Bài 16. Đáy của một hình hộp đứng ABCD. A'B'C'D' là một hình thoi cạnh a và góc nhọn A ở đáy bằng α. Đường chéo AC' tạo với đáy một góc β.

a) Chứng minh AC' là đường chéo lớn nhất của hình hộp.

b) Tìm thể tích hình hộp.

Bài 17. Cho hình lăng trụ đứng đáy là tam giác ABC có $\widehat{C} = 90^o$, $\widehat{A} = \alpha$ và cạnh AC = b. Đường chéo mặt bên của lăng trụ đi qua cạnh huyền AB tạo một góc β với mặt bên đi qua cạnh góc vuông AC. Tính thể tích của hình lăng trụ.

Bài 18. Đáy của hình lăng trụ đứng là tam giác cân ABC có cạnh đáy BC = m và góc ở đáy bằng α. Tính thể tích của hình lăng trụ biết rằng diện tích xung quanh của nó bằng tổng diện tích hai đáy.

Bài 19. Một hình lăng trụ đứng ABC. A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A. Hình lăng trụ đó nội tiếp trong một hình trụ bán kính đáy là r. Cạnh AC trương cung 2β. Đường chéo mặt bên BCC'B của hình lăng trụ tạo với mặt đáy góc α.

a) Chứng minh $\widehat{B'CB} = \widehat{C'BC} = \alpha$.

b) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

Bài 20. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' có góc giữa đường chéo A'C và đáy là α. Thiết diện qua đỉnh A' và cạnh AC tạo với đáy một góc φ. Đường chéo AC = a.

a) Chứng minh $\widehat{A'CA} = \alpha, \widehat{A'BA} = \varphi$.

b) Tính thể tích hình hộp.

Liên quan đến hình chóp

Bài 21. Cho hình chóp S.ABC trong đó AB = AC, $\widehat{ABC} = \alpha$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là r và các mặt bên tạo với mặt đáy một góc β. Tính diện tích đáy và thể tích của hình chóp.

Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh AB = a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SC tạo với đáy góc α và tạo với mặt bên SAB góc β.

a) Chứng minh rằng $SC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2$ và có giá trị là

$$\frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

b) Tính thể tích hình chóp.

Bài 23. Cho hình chóp đỉnh S, đáy ABCD là một hình thoi có góc nhọn $\widehat{B} = \widehat{D} = \alpha$, đường cao hình chóp bằng a. Hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với đáy, còn hai mặt kia tạo với đáy một góc β.

a) Chứng minh SA là đường cao hình chóp và $\widehat{SHA} = \beta$, H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh đáy BC.

b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài 24. Một hình chóp có đáy là một tam giác đều cạnh a. Đường cao hạ từ đỉnh hình chóp đi qua đỉnh A. Mặt bên hình chóp đi qua cạnh BC tạo với đáy một góc φ.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

b) Người ta cắt hình chóp bằng một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm của đường cao hình chóp. Tính thể tích hình chóp cụt tạo thành.

Bài 25. Cho hình chóp P.ABC có các cạnh bên bằng a, đáy ABC là tam giác cân có $\widehat{A} = \alpha$ và AB = AC = a.

a) Tính diện tích mặt PBC.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp.

c) Tính diện tích của thiết diện tạo thành khi cắt hình chóp bằng một mặt phẳng đi qua BC và vuông góc với PA.

Liên quan đến hình nón

Bài 26. Cho hình chóp tứ giác đều có góc phẳng ở đỉnh bằng α và cạnh đáy a nội tiếp trong một hình nón. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình nón.

Bài 27. Trong hình chóp tam giác đều khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt bên là d. Góc giữa đường cao hình chóp và mặt bên là φ. Tính diện tích toàn phần của hình nón nội tiếp trong hình chóp đó.

Bài 28. Thiết diện qua trục của một hình nón có góc ở đỉnh bằng 2α. Tổng độ dài của đường cao và đường sinh của nó bằng p. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình nón.

Bài 29. Đáy hình nón là một hình vuông cạnh a. Mặt phẳng đi qua đỉnh và cạnh hình vuông cắt hình nón theo một thiết diện hình tam giác có góc ở đỉnh bằng φ. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình nón.

Liên quan đến hình cầu

Bài 30. Cho hình cầu bán kính R trong đó có hình chóp tam giác đều nội tiếp mà góc giữa đường cao và cạnh bên bằng α. Tính thể tích hình chóp.

Bài 31. Cho hình chóp P.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và có các cạnh bên đều tạo với đáy một góc φ.

a) Tính diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp.

b) Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và tính diện tích mặt cầu đó.

Bài 32. Từ một điểm S của hình cầu bán kính R ta kẻ ba dây bằng nhau SA = SB = SC tạo với nhau một góc α. Tính độ dài của các dây này.

C. GỢI Ý PHƯƠNG PHÁP GIẢI - GIẢI

Bài 1. Xét tam giác EBO (hình 20) ta có:

$$BE = \frac{1}{2}AB \text{ và } R = OB = \frac{AB}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

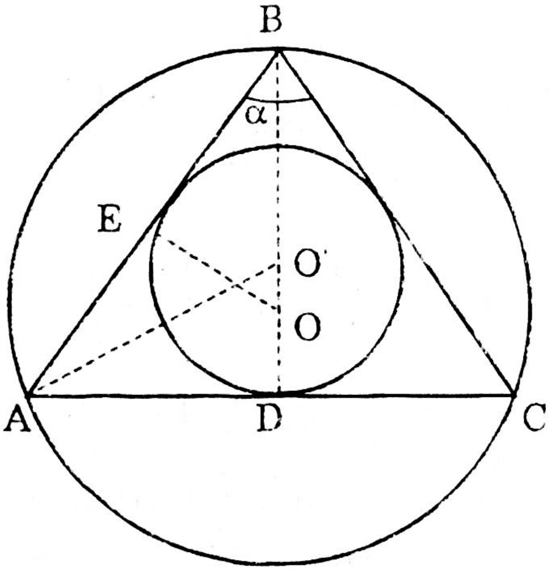
Xét tam giác ADO' ta có:

$$\widehat{DAO'} = \frac{1}{2}\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

Từ đó: $r = O'D = AD.\tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$.

Vì $AD = AB.\sin\frac{\alpha}{2}$ (trong tam giác ABD)

nên tỉ số: $\frac{R}{r} = \frac{\cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$.



Hình 20

Bài 2. Giả sử $C_1 = C_2 = C_3 = \alpha$ (hình 21) và CD = y, CE = x.

Ta tính diện tích tam giác ABC như sau:

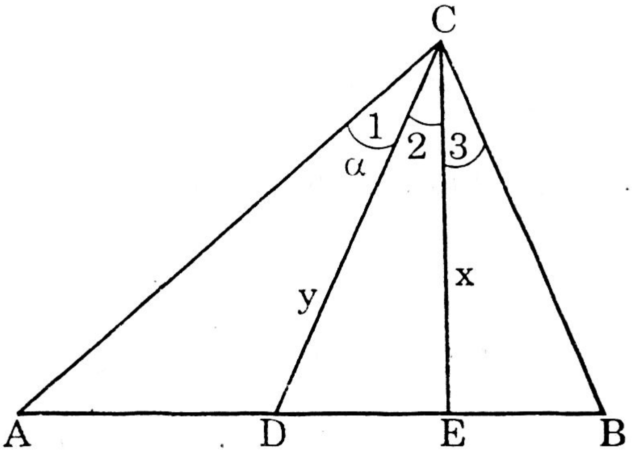
$$S_{ACD} + S_{DCB} = \frac{1}{2}by\sin\alpha + \frac{1}{2}ay\sin 2\alpha$$

$$S_{ACE} + S_{ECB} = \frac{1}{2}bx\sin 2\alpha + \frac{1}{2}ax\sin\alpha$$

$$S_{ACD} + S_{DCE} + S_{ECB} = \frac{1}{2}by\sin\alpha + \frac{1}{2}xy\sin\alpha + \frac{1}{2}ax\sin\alpha.$$

Các vế trái của ba đẳng thức này như nhau vì đều là diện tích tam giác ABC, nên các vế phải bằng nhau và lưu ý đến giả thiết ta phải giải hệ ba phương trình sau:

$$\begin{cases} 2a\cos\alpha = x + a\dfrac{x}{y} \\ 2b\cos\alpha = y + a\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}. \end{cases}$$



Hình 21

Giải hệ này ta được:

$$x = CE = \frac{(n^2 - m^2)ab}{n(bm - an)},$$

$$y = CD = \frac{(n^2 - m^2)ab}{m(bm - an)}.$$

Bài 3

a) Trường hợp ΔABC nhọn (hình 22a).

Ta có: $S_{ABC} - S_{A'B'C'} = S_{B'AC'} + S_{C'BA'} + S_{A'CB'}$ (1)

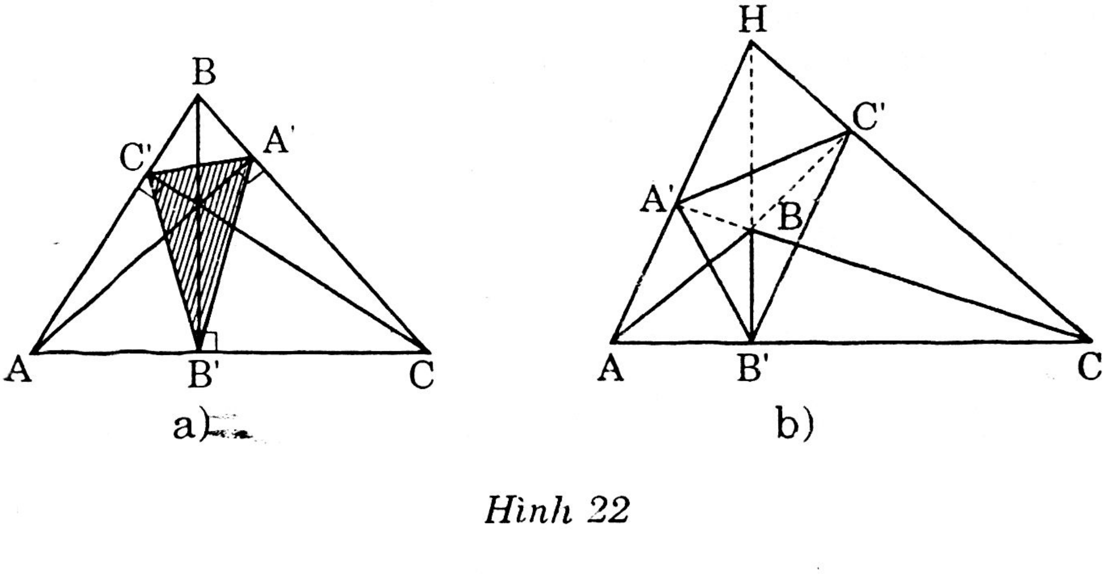
Lại có: $S_{B'AC'} = \frac{1}{2}AB'.AC'\sin A = \frac{1}{2}AB\cos A.AC\cos A.\sin A$

$= \frac{1}{2}AB.AC\sin A\cos^2 A = S_{ABC}.\cos^2 A.$

Tương tự: $S_{C'BA'} = S_{ABC}.\cos^2 B$; $S_{A'CB'} = S_{ABC}.\cos^2 C$.

Thay vào (1) rồi biến đổi được:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C \qquad (2)$$



a) b)

Hình 22

b) Trường hợp ΔABC có một góc tù B (hình 22b)

Đáng lẽ là (1) ta sẽ có:

$$S_{ABC} + S_{A'B'C'} = S_{B'AC'} + S_{C'BA'} + S_{A'CB'}.$$

Đáng lẽ là (2) ta sẽ có:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 \qquad (3)$$

c) Trường hợp ΔABC vuông.

Khi đó: $S_{A'B'C'} = 0$, có thể thử lại điều này từ biểu thức (2) hoặc (3) ở trên.

Bài 4. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Ta có (hình 23) AB = 2R và

$$AB = r\cot\frac{A}{2} + r\cot\frac{B}{2}.$$

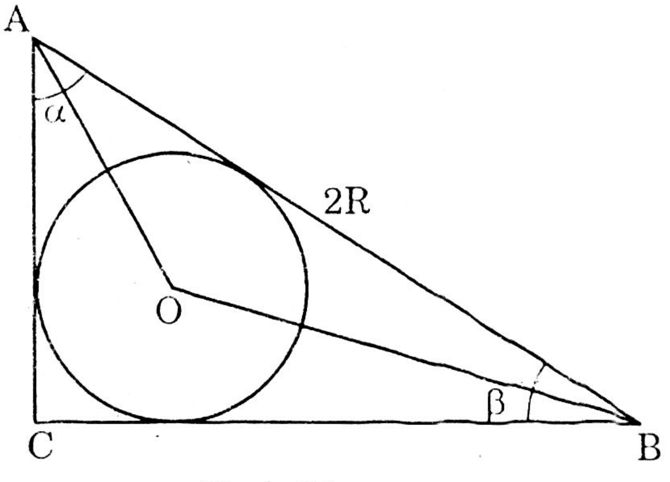
Từ đó: $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} = \frac{2R}{r} = 5$.

Lại có: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{4}$ và

$\cot\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = 1$, tức là

$$\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} - 1}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}} = 1.$$

Suy ra $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = 6$.



Hình 23

Như thế $\cot\frac{A}{2}$ và $\cot\frac{B}{2}$ là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 6 = 0$. Cuối cùng ta được:

$$A = 2\arctan\frac{1}{2}\ ;\ B = 2\arctan\frac{1}{3}.$$

Bài 5. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh tam giác ABC, ta chứng minh công thức tính độ dài phân giác góc A là $m_a = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

Thật thế, diện tích ΔABC bằng:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cm_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bm_A\sin\frac{A}{2}.$$

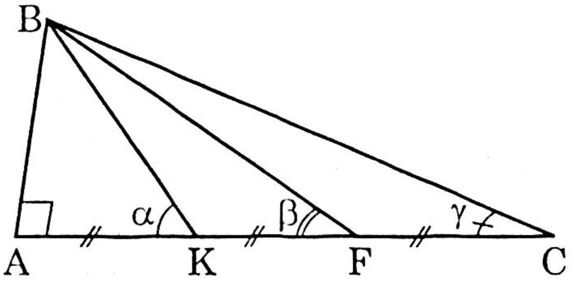
Suy ra: $m_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ (1)

Tương tự: $m_b = \dfrac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$ (2)

Giả sử a > b, thế thì $\widehat{A} > \widehat{B}$ và do $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2}$. Do đó tử của (1) < tử của (2), còn mẫu $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ của (1) lại > mẫu $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ của (2) vì $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Vậy $m_a < m_b$.

Bài 6. Giả sử $\widehat{AKB} = \alpha, \widehat{AFB} = \beta, \widehat{ACB} = \gamma$ (hình 24).



Hình 24

Ta có: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ và do $\tan\beta = \frac{1}{2}$, $\tan\gamma = \frac{1}{3}$ nên:

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1.$$

Suy ra: $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ và $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Bài 7. Gọi r, R là bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, S là diện tích tam giác đã cho, p là nửa chu vi. Ta có:

$$\frac{r}{R} = \frac{S}{pR} = \frac{1}{2}\cdot\frac{ab\sin C}{pR} = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A + \sin B + \sin C)}.$$

Nhưng $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} +$

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Vậy $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Bài toán quy về chứng minh bất đẳng thức

$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$(xem bài 4 của dạng toán 4: Các hệ thức lượng giác trong tam giác).

Bài 8. Gọi α (hình 25) là góc của hình bình hành. Ta có:

$h_1 = BM = AB\sin\alpha, h_2 = BN = BC\sin\alpha$.

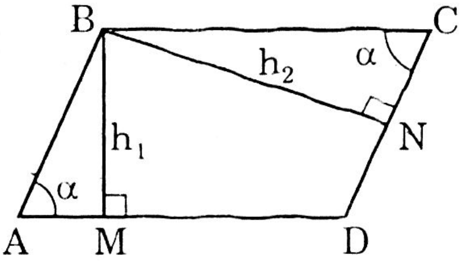
Thế thì:

$h_1 + h_2 = (AB + BC)\sin\alpha = p\sin\alpha$.

Suy ra: $\sin\alpha = \frac{h_1 + h_2}{p}$.

Nếu α là góc nhọn (hoặc góc vuông) thì

$\alpha = \arcsin\frac{h_1 + h_2}{p}$.



Hình 25

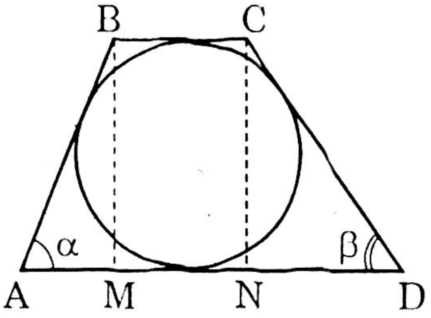
Khi đó góc tù (hoặc góc vuông) của hình bình hành sẽ là $\pi - \arcsin\frac{h_1 + h_2}{p}$.

Lưu ý: Bài toán sẽ không giải được nếu $h_1 + h_2 > p$.

Bài 9. Diện tích hình thang ABCD (hình 26) bằng $\frac{BC + AD}{2}.BM = (BC + AD).R$, trong đó R là bán kính đường tròn nội tiếp.

Do đó: BC + AD = AB + CD.

Nhưng $AB = \frac{2R}{\sin\alpha}$, $CD = \frac{2R}{\sin\beta}$, nên:

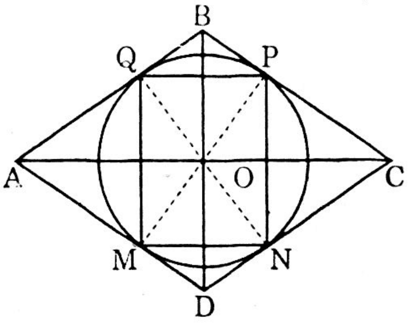


Hình 26

$$Q = 2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 2R^2 . \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta},$$

từ đó: $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$.



Hình 27

Bài 10. Ta phải tính diện tích hình chữ nhật MNPQ (hình 27) Đường thẳng QN nối các tiếp điểm của hai đường thẳng song song AB và CD là đường kính đường tròn (O). Do đó các góc nội tiếp QPN và QMN đều vuông (tương tự các góc MQP và MNP cũng vuông). Vậy tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Tam giác ABD đều (vì AB = AD và $\widehat{A} = 60^\circ$) nên đường cao QN của hình thoi bằng đường cao của tam giác ABD,

tức là $QN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích S của hình chữ nhật MNPQ bằng:

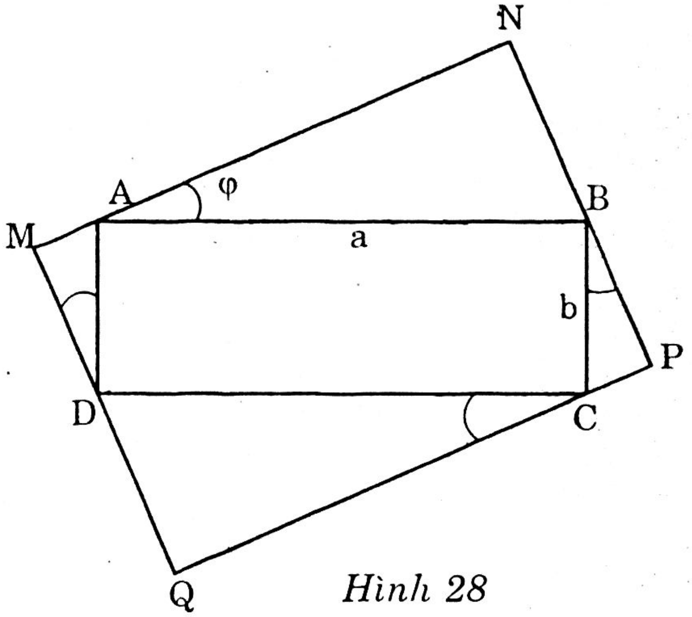
$$S = QN^2.\sin\widehat{QOP} = QN^2.\sin\widehat{BAD}$$

(cạnh các góc $\widehat{QOP}$ và $\widehat{BAD}$ vuông góc với nhau).

Vậy $S = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{18}$.

Bài 11. Gọi a và b là hai cạnh của hình chữ nhật ABCD (hình 28), φ là góc giữa cạnh của hình chữ nhật ngoại tiếp MNPQ và cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Các cạnh của hình chữ nhật MNPQ bằng:



Hình 28

$a\cos\varphi + b\sin\varphi$ và $a\sin\varphi + b\cos\varphi$.

Theo bài ra ta có: $(a\cos\varphi + b\sin\varphi)(a\sin\varphi + b\cos\varphi) = m^2$.

Từ đó tìm được: $\sin 2\varphi = \dfrac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}$.

Để bài toán giải được ta phải có $0 \le \sin 2\varphi \le 1$, tức là

$\sqrt{ab} \le m \le \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Bài 12. Gọi O là giao điểm các đường chéo của tứ giác ABCD và $\widehat{BOA} = \alpha$ (hình 29)

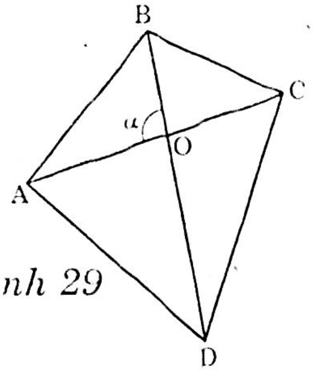
Diện tích của tứ giác này bằng:

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC}$

$= \frac{1}{2}AO.OB\sin\alpha + \frac{1}{2}OC.OD\sin\alpha + \frac{1}{2}BO.OC\sin\alpha + \frac{1}{2}AO.OD\sin\alpha$,

hay $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD.AC\sin\alpha$.

Đây là biểu thức tính diện tích tứ giác theo hai đường chéo và góc giữa các đường chéo. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.



Hình 29

Bài 13. Do AO là phân giác góc

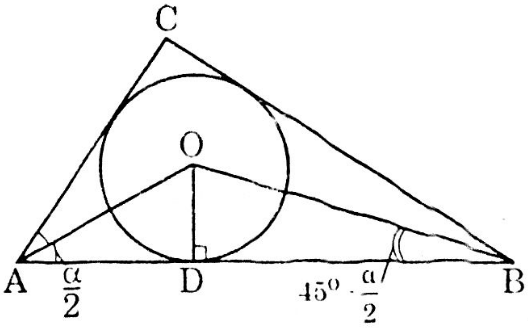
$\alpha = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{BAO} = \dfrac{\alpha}{2}$ (hình 30)

ta có: $\widehat{ABO} = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Từ hai tam giác AOD và BOD ta có:

$AD = OD\cot\dfrac{\alpha}{2}$ và

$DB = OD.\cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.



Hình 30

Do đó: $c = AB = AD + DB = OD.\left[\cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.

Từ đó tìm được: $r = \dfrac{c}{\cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Ta biến đổi tiếp mẫu như sau:

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

hay mẫu trở thành:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

Vậy bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác bằng:

$$r = c\sqrt{2}.\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Bài 14. Gọi bán kính của đường tròn nội tiếp là x sao cho O'A = O'B = x (hình 31).

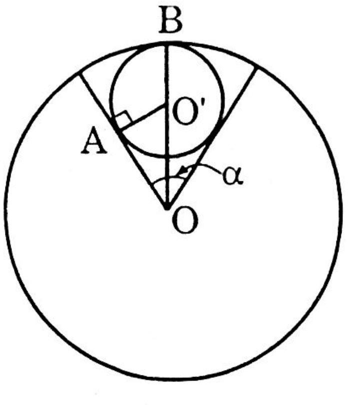
Xét tam giác vuông OAO' trong đó $\widehat{O'OA} = \dfrac{\alpha}{2}$,

OO' = OB − O'B = R − x , ta có:

$O'A = OO'\sin\dfrac{\alpha}{2}$, tức là $x = (R - x)\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Từ đó ta tìm được:

$$x = \frac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{4}\right)}.$$



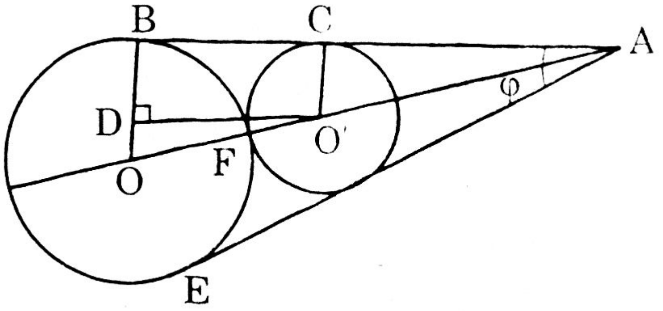
Hình 31

Bài 15. Ta có : $\widehat{BAE} = \varphi$ (hình 32), nên

$\widehat{BAO} = \dfrac{\varphi}{2}$. Ta phải tìm R = OB và r = O'C. Ta có:

$$R + r = OF + FO' = OO' = d \quad (1)$$

và
$$R - r = OB - O'C = OD.$$



Hình 32

Xét tam giác vuông ODO' trong đó $\widehat{OO'D} = \widehat{BAO} = \frac{\varphi}{2}$, ta có:

$$OD = OO'\sin\frac{\varphi}{2}, \text{ hay } R - r = d\sin\frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

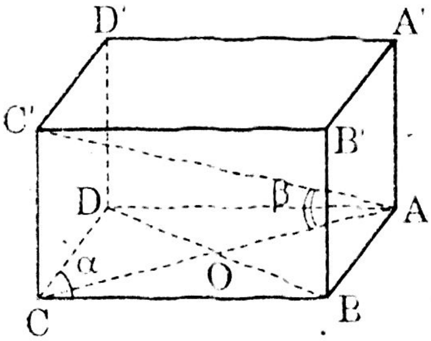
Từ (1) và (2) ta tìm được:

$$R = \frac{d(1 + \sin\frac{\varphi}{2})}{2}, \quad r = \frac{d\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2}.$$

Thay $\sin\frac{\varphi}{2}$ bằng $\cos\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ ta sẽ được:

$$R = d\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right) \text{ và } r = d\sin^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right).$$

Bài 16. Trong hình hộp các đường chéo bằng nhau từng đôi một:



Hình 33

AC' = A'C và DB' = D'B (hình 33)

Gọi $\widehat{DCB} = \alpha$ (góc nhọn theo giả thiết) ta có: $\widehat{CDA} = 180^\circ - \alpha$ (góc tù) nên $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Từ tam giác vuông ACC' ta có: CO > DO nên CA > DB.

Mặt khác từ tam giác vuông ACC' lại có:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2. \quad (1)$$

Từ tam giác vuông BDD' lại có: $BD'^2 = DB^2 + DD'^2$ (2)

So sánh (1) và (2) ta được: AC' > BD'.

Vậy AC' là đường chéo lớn nhất.

b) Hình chiếu vuông góc của AC' trên đáy là AC nên $\widehat{CAC'} = \beta$.

Thể tích hình hộp bằng:

$$V = B.h\ ,\ \text{với } B = a^2 \sin\alpha .$$

Từ tam giác vuông CAC' ta có:

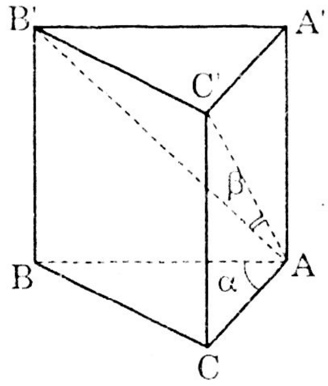
CC' = CA. tanβ = 2AO.tanβ (O là giao điểm hai đường chéo đáy).

Từ tam giác vuông AOB lại có $AO = a\cos\frac{\alpha}{2}$,

do đó $CC' = 2a\cos\frac{\alpha}{2}\tan\beta$.

Vậy $V = a^2\sin\alpha.2a\cos\frac{\alpha}{2}\tan\beta = 2a^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\tan\beta$.

Bài 17. Gọi AC' là hình chiếu của đường chéo AB' lên mặt AA'C'C (hình 34) ta co $\widehat{B'AC'} = \beta$.



Hình 34

Đường cao hình lăng trụ là:

$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2}$, trong đó AC' được xác định từ tam giác B'AC', ta có:

$$CC' = \sqrt{b^2\tan^2\alpha\cot^2\beta - b^2}$$

$$= b\cot\beta\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}$$

$$= \frac{b}{\cos\alpha\sin\beta}.\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$$

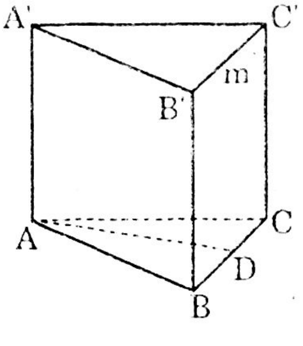
Vậy thể tích hình lăng trụ bằng:

$$V = \frac{b^3\tan\alpha}{2\cos\alpha\sin\beta}.\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} .$$

Bài 18. Diện tích đáy của hình lăng trụ bằng $s = \frac{1}{4}m^2\tan\alpha$ (hình 35). Theo bài ra ta có:

$$S_{xq} = 2.s = \frac{1}{2}m^2\tan\alpha .$$

Mặt khác:



$$S_{xq} = \left(m + 2.\frac{\frac{m}{2}}{\cos\alpha} \right).h = \frac{2m\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.h$$

Hình 35

Cân bằng hai biểu thức của S_{xq}, ta tìm được:

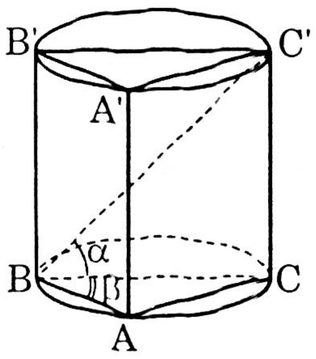
$$h = \frac{m}{4}.\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{2}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Vậy $$V = \frac{m^3}{8}\tan\alpha\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Bài 19

a) Dây AC trương cung 2β nên $\widehat{ABC} = \beta$. Tam giác ABC vuông ở A nội tiếp trong đường tròn nên BC = 2r là đường kính hình tròn ngoại tiếp. (hình 36)

Lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng nên cạnh bên CC' vuông góc với đáy, do đó BC là hình chiếu vuông góc của đường chéo C'B, vậy $\widehat{C'BC} = \alpha$. Tương tự ta có $\widehat{B'CB} = \alpha$.



Hình 36

b) Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là:

$$S_{xq} = (BC + AB + AC).CC'.$$

Xét tam giác vuông ABC ta có:

$$AB = 2r\cos\beta,\ AC = 2r\sin\beta.$$

Từ tam giác vuông CBC' lại có CC' = 2r$\tan\alpha$, do đó

$$S_{xq} = (2r + 2r\cos\beta + 2r\sin\beta).2r\tan\alpha$$

$$= 4r^2\tan\alpha(1 + \cos\beta + \sin\beta).$$

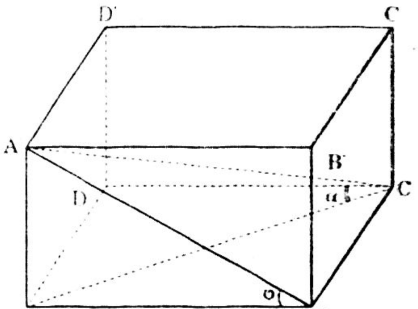
Biến đổi: $1 + \cos\beta + \sin\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$

$$= 2\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right) = 2\cos\frac{\beta}{2}\left[\cos\frac{\beta}{2} + \cos\left(90^o - \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^o - \frac{\beta}{2}\right).$$

Vậy $S_{xq} = 8\sqrt{2}.r^2\tan\alpha\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$.

Bài 20



Hình 37

a) Do ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật nên AA' vuông góc với mặt đáy ABCD (hình 37) và AC là hình chiếu của A'C trên đáy ABCD. Do đó $\widehat{A'CA} = \alpha$.

ABCD là hình chữ nhật nên $AB \perp BC$, AB lại là hình chiếu của A'B trên đáy ABCD nên theo định lý ba đường vuông góc ta có $A'B \perp BC$. Do đó $\widehat{A'BA} = \varphi$.

b) Thể tích của hình hộp là:

$$V = AB.\ BC.\ AA'$$

Từ các tam giác vuông A'AC, A'AB và ABC ta có:

$$AA' = a\tan\alpha$$

$$AB = AA'\cot\varphi = a\tan\alpha\cot\varphi$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 \text{nên} BC = a\sqrt{1 - \tan^2\alpha\cot^2\varphi} \qquad (*)$$

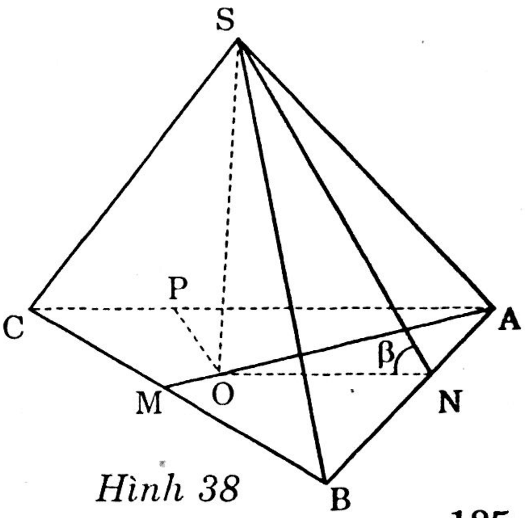
Biến đổi tiếp:

$$1 - \tan^2\alpha\cot^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi\cos^2\alpha - \cos^2\varphi\sin^2\alpha}{\sin^2\varphi\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha)}{\sin^2\varphi\cos^2\alpha}.$$

Thay vào (*) được: $V = \dfrac{a^3\sin^2\alpha\cos\varphi.\sqrt{\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha)}}{\cos^3\alpha\sin^2\varphi}$.

Bài 21. Kẻ đường cao SO. Từ O kẻ $OM \perp BC, ON \perp AB, OP \perp AC$ (hình 38). Ta xác định góc β và chứng minh O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đáy ABC.



Hình 38

Nối SN ta có:

$SN \perp BA$, tương tự ta có $SM \perp CB$ và (định lý ba đường vuông góc). Do đó:

$\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \beta$.

Ba tam giác vuông SOM, SON và SOP bằng nhau (SO chung và đều có góc nhọn bằng β), vậy OM = ON = OP. Suy ra O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đáy ABC.

a) **Tính S_{ABC}.**

Xét tam giác vuông OMB ta có $MB = OM\cot\frac{\alpha}{2} = r\cot\frac{\alpha}{2}$.

Xét tam giác vuông AMB (AM là đường cao và cũng là phân giác vì ΔABC cân) lại có:

$$AM = MB\tan\alpha = r\cot\frac{\alpha}{2}\tan\alpha.$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}CB.AM = MB.AM = r\cot\frac{\alpha}{2}.r\cot\frac{\alpha}{2}\tan\alpha$

hay $S_{ABC} = r^2\cot^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha$.

b) **Tính thể tích hình chóp.**

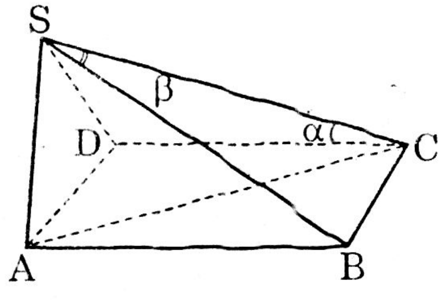
Xét tam giác vuông SON ta có:

$$SO = ON\tan\beta = r\tan\beta.$$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO$, hay

$$V = \frac{1}{3}r^3\cot^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha\tan\beta.$$

Bài 22



Hình 39

a) **Theo bài ra SA vuông góc với đáy nên AC là hình chiếu của SC trên đáy và** $\widehat{SCA} = \alpha$ (hình 39)

Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên BC vuông góc với mặt phẳng SAB, do đó **SB là hình chiếu của SC trên mặt bên SAB, vậy** $\widehat{CSB} = \beta$.

Xét tam giác vuông SAC ta có:

$SC^2 = SA^2 + AC^2$, mà $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (ΔABC vuông).

Lại có $BC = SC \sin\beta$ (ΔSBC vuông)

$SA = S.C \sin\alpha$ (ΔSAC vuông)

Do đó: $SC^2 = SC^2 \sin^2\alpha + a^2 + SC^2 \sin^2\beta$

hay $\qquad SC^2 - SC^2 \sin^2\alpha - SC^2 \sin^2\beta = a^2$;

$\qquad SC^2(1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta) = a^2$, hay

$\qquad SC^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta) = a^2$.

Vậy nếu $\cos^2\alpha - \sin^2\beta \neq 0$ thì

$$SC^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

b) Thể tích $V = \frac{1}{3} SA.AB.BC$

$$= \frac{1}{3} AB.SC^2 \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{3} a.\frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.\sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$

Biến đổi $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

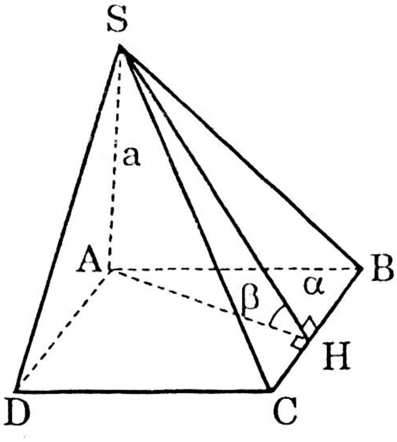
Vậy $V = \dfrac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{3\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$.

Bài 23

a) Hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với đáy (hình 40) nên giao tuyến SA của chúng phải vuông góc với đáy, SA chính là đường cao hình chóp.

Vẽ $AH \perp BC$, suy ra $SH \perp BC$ (theo định lí ba đường vuông góc), ta có $\widehat{SHA} = \beta$.

b) Hai tam giác vuông SAB và SAD có SA chung, AB = AC (cạnh hình thoi) nên



Hình 40

chúng bằng nhau.

Lại có $\Delta SBC = \Delta SDC$ vì có SC chung,

$BC = CD$ (cạnh hình thoi), $SB = SD$ (do $\Delta SAB = \Delta SAD$).

Do đó: $S_{xq} = 2(S_{SAB} + S_{SBC}) = 2\left(\frac{1}{2}SA.AB + \frac{1}{2}SH.BC\right)$

$= AB\,(SA + SH)$.

Xét tam giác vuông SAH, ta có $SH = \frac{a}{\sin\beta}$ và $AH = a\cot\beta$.

Xét tam giác vuông AHP, ta có:

$$AB = \frac{AH}{\sin\alpha} = \frac{a\cot\beta}{\sin\alpha}.$$

Từ đó: $S_{xq} = \frac{a\cot\beta}{\sin\alpha}\left(a + \frac{a}{\sin\beta}\right) = \frac{a^2\cot\beta}{\sin\alpha\sin\beta}(1 + \sin\beta)$.

Mà $1 + \sin\beta = 1 + \cos(90^o - \beta) = 2\cos^2\left(45^o - \frac{\beta}{2}\right)$, vậy:

$$S_{xq} = \frac{2a^2\cot\beta\cos^2\left(45^o - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Bài 24

a) Kẻ $AM \perp BC$. Nối SM, theo định lí ba đường vuông góc ta có $SM \perp BC$ (hình 41), vậy $\widehat{SMA} = \varphi$.

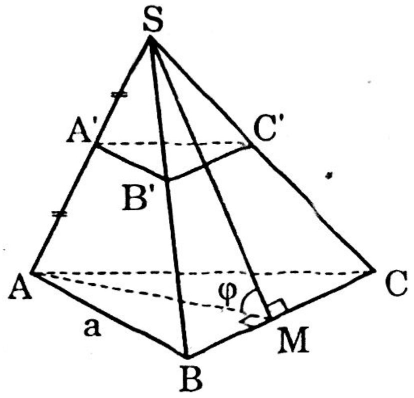
Diện tích xung quanh hình chóp là:

$S_{xq} = S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC}$.

Hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau vì có SA chung và $AC = AB$ $(= a)$, nên:

$S_{xq} = 2S_{SAC} + S_{SBC}$

$= 2 \times \frac{1}{2}AC.SA + \frac{1}{2}BC.SM$



Hình 41

Tam giác ABC đều có cạnh là a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Từ tam giác vuông SAM, lại có $SA = SM\tan\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi$;

$$SM = \frac{AM}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\varphi}.$$

Vậy $S_{xq} = a\times\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi + \dfrac{1}{2}a\times\dfrac{a\sqrt{3}}{2\cos\varphi} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2\cos\varphi}\left(\dfrac{1}{2}+\sin\varphi\right)$

Biến đổi $\dfrac{1}{2}+\sin\varphi = \sin 30^o + \sin\varphi = 2\sin\left(15^o+\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(15^o-\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Thành thử ta được:

$$S_{xq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\varphi}.\sin\left(15^o+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(15^o-\frac{\varphi}{2}\right).$$

b) Thiết diện A'B'C' song song với đáy ABC và A' là trung điểm của SA nên ta có:

$\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{SA'^2}{SA} = \dfrac{SA'^2}{(2SA')^2} = \dfrac{1}{4}$; suy ra

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Thể tích hình chóp cụt tạo thành bằng:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_{ABC}+S_{A'B'C'}+\sqrt{S_{ABC}.S_{A'B'C'}}\right).AA'$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}+\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}\right)\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\tan\varphi$$

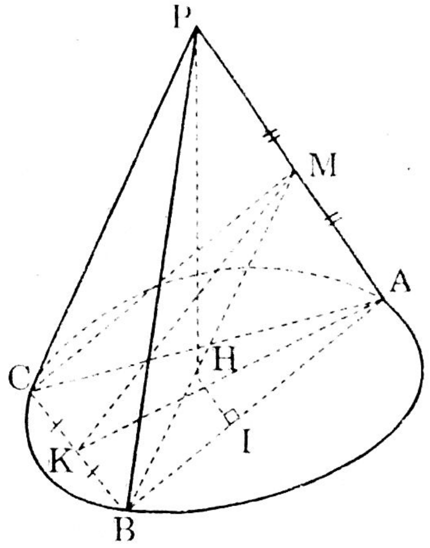
$$= \frac{a\sqrt{3}}{12}\tan\varphi\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right).$$

Vậy $V = \dfrac{7}{64}a^3\tan\varphi$.

Bài 25

a) Ta có: $\Delta ABC = \Delta BPC$ vì BC chung, $AB = AC = PB = PC = a$, do đó $\widehat{BPC} = \widehat{BAC} = \alpha$ (hình 42).

Vậy $S_{BPC} = S_{BAC} = \dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha$.



Hình 42

b) Vẽ đường cao PH. Vì PA = PB = PC nên HA = HB = HC, do đó chân đường cao H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp.

Diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp là $S_{xq} = \pi.AH.PA$.

Trong tam giác ABC, kẻ trung trực HI ta có

$$AI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

Lại có, từ tam giác vuông AHI, đoạn $AH = \dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Vậy $S_{xq} = \pi.\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.a = \dfrac{\pi a^2}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

c) Thiết diện BMC vuông góc với PA nên BM và CM vuông góc với PA. Các tam giác PAB và PAC là những tam giác đều nên BM và CN vừa là đường cao vừa là trung tuyến (khi dựng thiết diện chỉ cần lấy M là trung điểm của PA rồi nối MB và MC), do đó:

$BM = CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra BMC là tam giác cân.

Gọi K là trung điểm của BC ta có MK ⊥ BC.

Diện tích của thiết diện phải tìm:

$$S_{td} = \frac{1}{2}BC.MK.$$

Ta tính MK như sau:

Từ tam giác vuông ABK có: $\frac{BC}{2} = BK = a\sin\frac{\alpha}{2}$.

Từ tam giác vuông MBK có:

$$MK^2 = BM^2 - BK^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$= a^2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right], \text{từ đó } MK = a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Do đó: $S_{td} = a\sin\frac{\alpha}{2}.a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2 60 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Biến đổi tiếp:

$$\sin^2 60^\circ - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos 120^\circ}{2} - \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha - \cos 120^\circ}{2}$$

$$= \sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Vậy diện tích thiết diện phải tìm là:

$$S_{td} = a^2\sin\frac{\alpha}{2}.\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

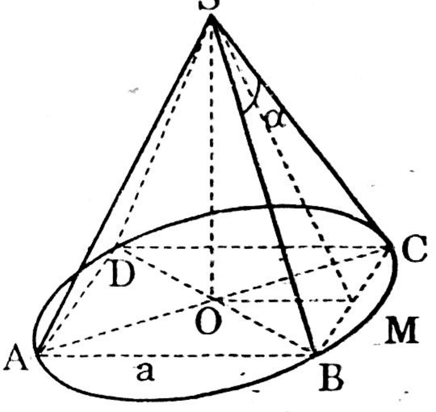
Bài 26. Góc phẳng ở đỉnh là góc tạo bởi hai cạnh bên thuộc một mặt cùng xuất phát từ đỉnh, ta có $\widehat{BSC} = \alpha$ (hình 43)

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên bốn góc phẳng ở đỉnh đều bằng nhau và bằng α. Kẻ đường cao SO, ta có:

OA = OB = OC = OD.

Vậy O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Ta có:

$V = \frac{1}{3}\pi OC^2.SO$, $AC = a\sqrt{2}$ (AC là đường chéo hình vuông cạnh a) nên $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, còn $SC = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ (từ tam giác



Hình 43

vuông SMC).

Xét tam giác vuông SOC ta có:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{2a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy:

a) $V = \frac{1}{3}\pi.\frac{2a^2}{4}.\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}.$

b) $S_{tp} = \pi OC(OC + SC).$

$$= \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}).$$

Biến đổi tiếp:

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} + 1 = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin 45^o\right)$$

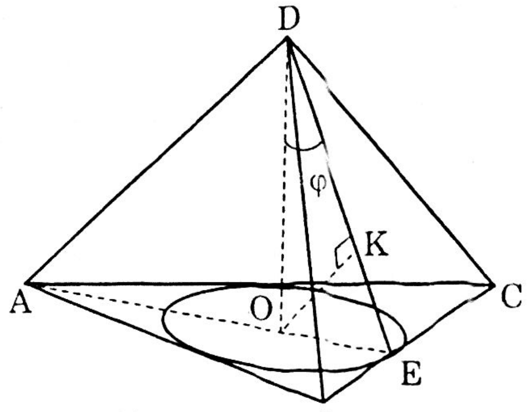
$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{90^o + \alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{90^o - \alpha}{4}\right).$$

Từ đó: $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{90^o + \alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{90^o - \alpha}{4}\right).$

Bài 27. Gọi O là tâm của đáy, ta có BC ⊥ OE và BC ⊥ DE (E là trung điểm của BC) nên BC ⊥ mp ODE (hình 44).

Do đó mp DBC ⊥ mp ODE (OE là giao tuyến).

Từ O trong mp ODE kẻ OK ⊥ DE ta



Hình 44

có OK ⊥mp DBC và OK chính là khoảng cách từ O đến mặt bên, nên OK = d.

Hình chiếu vuông góc của DO trên mặt bên DBC là DK nên góc giữa đường cao DO và mặt bên BDC là $\widehat{ODK}$, do đó $\widehat{ODK} = \varphi$.

Hình nón nội tiếp trong hình chóp tam giác có đáy là hình tròn nội tiếp tam giác đáy ABC, E là một tiếp điểm của đường tròn đáy với cạnh BC nên OE là bán kính đáy hình nón và DE là đường sinh hình nón.

Ta có: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi.OE.DE + \pi.OE^2 = \pi.OE(DE + OE)$.

Xét tam giác vuông OEK có:

$$OE = \frac{OK}{\sin E} = \frac{d}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{d}{\cos\varphi}.$$

Do đó: $S_{tp} = \pi.\frac{d}{\cos\varphi}\left(\frac{d}{\sin\varphi\cos\varphi} + \frac{d}{\cos\varphi}\right) = \frac{\pi d^2}{\sin\varphi\cos^2\varphi}(1 + \sin\varphi)$.

Biến đổi tiếp:

$1 + \sin\varphi = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, vậy cuối cùng

$$S_{tp} = \frac{2\pi d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi\cos^2\varphi} = \frac{2\pi d^2\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin 2\varphi}.$$

Bài 28. Bán kính đáy R = $m\sin\alpha$, đường cao $h = m\cos\alpha$ (hình 45).

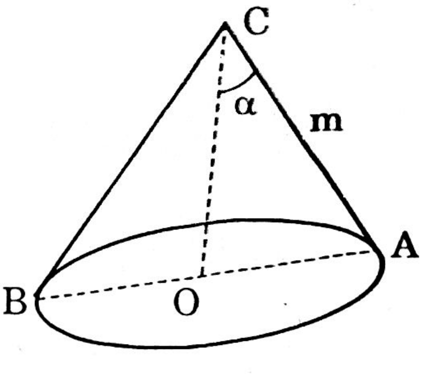
Thể tích hình nón bằng:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3} \qquad (1)$$

Diện tích toàn phần của hình nón bằng

$$S_{tp} = \pi R(m + R)$$

$$= \pi m^2\sin\alpha(1 + \sin\alpha) \qquad (2)$$



Hình 45

Theo bài ra m + h = p, do đó:

$m = \frac{p}{1 + \cos\alpha} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Thay giá trị của m vào (1) và (2) được:

$$S_{tp} = \frac{\pi p^2 \sin\alpha \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}}$$ và thể tích

$$V = \frac{\pi p^3 \sin^2\alpha \cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

Bài 29. Bán kính đáy hình nón $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (hình 46).

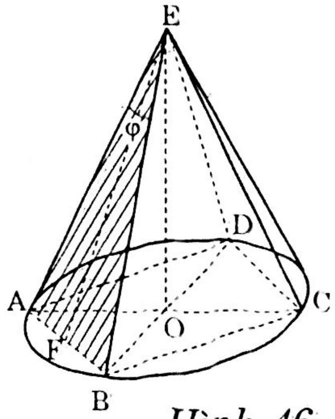
Từ tam giác AEF ta có:

$$AE = m = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Từ tam giác AOE ta có:

$$h = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$



Hình 46

Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

$$S_{tp} = \pi R(m + R) = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

hay
$$S_{tp} = \frac{\pi a^2}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Biến đổi tiếp:

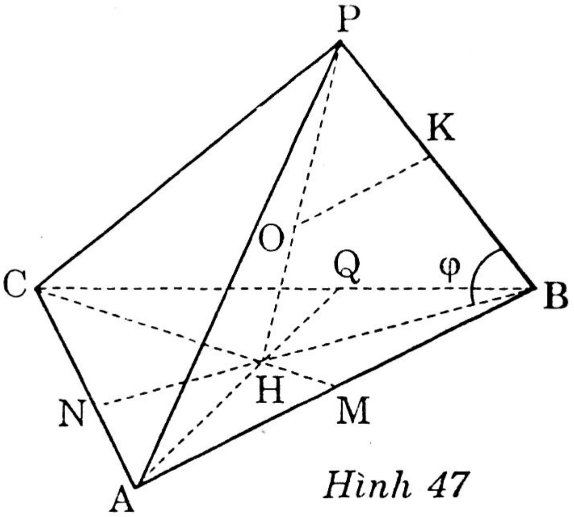
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\varphi}{2} = \sin 45^\circ + \sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{90^\circ + \varphi}{4}\cos\frac{90^\circ - \varphi}{4}.$$

Vậy ta có thể tích và diện tích toàn phần là:

$$V = \frac{\pi a^3\sqrt{\cos\varphi}}{12\sin\frac{\varphi}{2}};$$

$$S_{tp} = \frac{\pi a^2\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\pi a^2 \sin\frac{90^\circ+\varphi}{4}\cos\frac{90^\circ-\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Bài 30



Hình 47

a) Vẽ đường cao PH của hình chóp. Ta có HA, HB, HC là hình chiếu của PA, PB, PC trên mặt đáy nên $\widehat{PAH} = \widehat{PBH} = \widehat{PCH} = \varphi$ (hình 47).

Ba tam giác vuông PAH, PBH, PCH bằng nhau vì có cạnh SH chung, $\widehat{PAH} = \widehat{PBH} = \widehat{PCH}$. Suy ra HA = HB = HC, vậy H là tâm của đáy ABC.

Gọi M, N, Q là chân các đường cao của tam giác đều ABC, ta có HM = HN = HQ và HM ⊥ AB, HN ⊥ AC, HQ ⊥ BC.

Theo định lý ba đường vuông góc thì:

PM ⊥ AB , PN ⊥ AC , PQ ⊥ BC.

Ta có các góc PMH, PNH, PQH theo thứ tự là các góc tạo bởi các mặt bên PAB, PAC, PBC với mặt đáy.

Xét ba tam giác vuông PHM, PHN, PHQ bằng nhau vì có PH chung, HM = HN = HQ. Suy ra

$$\widehat{PMH} = \widehat{PNH} = \widehat{PQH}.$$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp} = \pi HB(HB + PB)$.

Xét tam giác ABC đều cạnh a, ta có đường cao $BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và

$$BH = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Từ tam giác vuông PHB lại có $PB = \frac{BH}{\cos\varphi} = \frac{a}{\sqrt{3}\cos\varphi}$.

Cuối cùng:

$$S_{tp} = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}\cos\varphi}\right) = \frac{\pi a^2}{3\cos\varphi}(\cos\varphi + 1) = \frac{2\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{3\cos\varphi}.$$

b) Tâm O của hình cầu ngoại tiếp hình chóp phải cách đều các đỉnh P, A, B, C của hình chóp.

O cách đều A, B, C phải nằm trên đường thẳng PH, O lại cách đều P và B nên phải nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn PB. Suy ra O là giao điểm duy nhất của đường thẳng PH với mặt phẳng trung trực này.

Diện tích mặt cầu bằng:

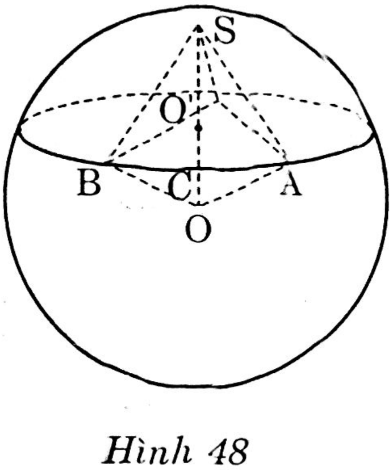
$$S_{mc} = 4\pi OP^2.$$

Từ tam giác vuông OKP (K là trung điểm của PB) mà $\widehat{KOP} = \widehat{PBH} = \varphi$ (góc có cạnh vuông góc) ta có:

$$OP = \frac{KP}{\sin\widehat{KOP}} = \frac{a}{2\sqrt{3}\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{a}{\sqrt{3}\sin 2\varphi}.$$

Vậy $$S_{mc} = 4\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}\sin 2\varphi}\right)^2 = \frac{4\pi a^2}{3\sin^2 2\varphi}.$$

Bài 32. Gọi O là tâm hình cầu và AS, BS, CS là các dây đã cho (hình 48). Rõ ràng tam giác ABC đều. Từ đó đường vuông góc SO' trên mặt phẳng ABC khi kéo dài sẽ đi qua tâm O của hình cầu, và điểm O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là độ dài của các dây phải tìm.



Hình 48

Xét tam giác SAB, ta có $AB = 2d\sin\frac{\alpha}{2}$

nên $O'A = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.d\sin\frac{\alpha}{2}$.

Bây giờ ta tính bằng hai cách diện tích tam giác cân SOA được:

$$\frac{1}{2}R \times \frac{2}{3}.d\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}d.\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Từ đó $$d = 2R.\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

D. BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 33. Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF có thể tính theo công thức:

$$S = \frac{1}{4}(d^2 \sin 2E + e^2 \sin 2D).$$

Bài 34. Cho tam giác ABC cân tại C. Đoạn CD kẻ từ đỉnh C tới đáy chia góc ở đỉnh theo tỉ số 1 : 2 và có độ dài bằng m. Tính diện tích tam giác.

Bài 35. Tính góc A của hình thoi ABCD biết diện tích của nó bằng Q và diện tích đường tròn nội tiếp nó bằng S.

Bài 36. Cho hình thoi ABCD cạnh a có góc nhọn A bằng α. Từ đỉnh A kẻ AE và AF chia hình thoi thành ba phần có diện tích bằng nhau (E trên BC, F trên CD). Tính AE và AF.

Bài 37. Cho đa giác đều 2n cạnh nội tiếp một đường tròn và đa giác đều n cạnh ngoại tiếp đường tròn. Hiệu diện tích hai đa giác đều này bằng M. Tính bán kính đường tròn.

Bài 38. Cho hai đường tròn cắt nhau bán kính R và r có khoảng cách nối tâm bằng d. Tìm diện tích phần chung của hai đường tròn.

Bài 39. Một hình hộp chữ nhật có đường chéo của đáy bằng m và tạo một góc φ với cạnh lớn của đáy. Mặt phẳng qua cạnh này và cạnh đối diện của đáy trên tạo với đáy dưới một góc nhị diện α. Tìm diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật.

Bài 40. Một hình hộp đứng có đáy là một hình thoi cạnh a và góc nhọn α. Một mặt phẳng qua đỉnh góc α cắt hình hộp theo một thiết diện hình thoi có góc nhọn $\frac{\alpha}{2}$. Tính diện tích thiết diện.

Bài 41. Cho hình chóp đỉnh F, đáy ABC là hình thoi có góc nhọn BAD bằng α. Tất cả các mặt bên đều tạo với đáy một góc β. Bán kính hình tròn nội tiếp trong hình thoi là r. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài 42. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác có góc ở đỉnh bằng φ. Bán kính hình tròn ngoại tiếp tam giác bằng R.

Tính diện tích toàn phần của hình nón.

Bài 43. Cho một hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh là m, góc giữa đường cao và đường sinh là β. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình nón đó.

Bài 44. Một hình chóp tam giác đều nội tiếp trong hình cầu bán kính R có góc giữa đường cao và cạnh bên là α. Tìm thể tích hình chóp.

Bài 45. Trong mặt phẳng P cho đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A dựng đoạn AS $\perp$ (P). Nối S với điểm M (khác A và B) của đường tròn. Góc giữa các mặt phẳng SMB và (P) là α, góc $\widehat{MAB}$ bằng β.

a) Chứng minh $\widehat{SMA} = \alpha$ và tìm thể tích hình chóp S.AMB.

b) Xác định tâm mặt cầu đi qua các điểm S, A, M, B và tìm diện tích mặt cầu đó.

Bài 46. Trong tam giác cho trước cạnh a, góc B và góc C. Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác xung quanh cạnh đã cho.

Bài 47. Cho tam giác ABC có cạnh bằng b và c và góc A giữa chúng bằng φ. Quay tam giác này xung quanh trục xy đi qua đỉnh A phía ngoài tam giác sao cho $\widehat{xAB} = \widehat{yAC} = \frac{\varphi}{2}$. Tính thể tích của hình tạo thành.

ĐÁP SỐ

Bài 33. Dựng tam giác DEK đối xứng với tam giác DEF đã cho qua cạnh DE để được diện tích tứ giác DFEK gấp đôi diện tích tam giác DEF.

Bài 34. Gọi góc $\widehat{BCD} = \alpha$ rồi xét tam giác BCD có góc $\widehat{BDC} = 90^o + \frac{\alpha}{2}$.

Đáp số: $S = \frac{m}{4a}(2a + m)\sqrt{(3a + m)(a - m)}$.

Bài 35. Góc A của hình thoi bằng $\arcsin\frac{4S}{\pi Q}$.

Bài 36. $AE = AF = \frac{a}{3}\sqrt{13 + 12\cos\alpha}$.

Bài 37. Bán kính đường tròn bằng:

$$\sqrt{\frac{M}{n(\tan\frac{180^\circ}{n} - \sin\frac{180^\circ}{n})}} = \frac{1}{\sin\frac{90^\circ}{n}}.\sqrt{\frac{M\cot\frac{180^\circ}{n}}{2n}}.$$

Bài 38. Diện tích phần chung của hai đường tròn cắt nhau bằng

$$R^2\arccos\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} + r^2\arccos\frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} - Rd\sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}\right)^2}.$$

Bài 39. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng:

$$2\sqrt{2}m^2\sin\varphi\cos(45^\circ - \varphi)\tan\alpha.$$

Bài 40. Diện tích thiết diện bằng $2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\alpha}{4}$.

Bài 41. Thể tích hình chóp bằng $\frac{4r^3\tan\beta}{3\sin\alpha}$; diện tích toàn phần hình chóp bằng $\frac{8r^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Bài 42. Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

$$4\pi R^2\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right).$$

Bài 43. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp bằng:

$$\frac{8m^2\cot\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin 2\beta}.$$

Bài 44. Thể tích hình chóp bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}R^3\sin^3 2\alpha\cot\alpha$.

Bài 45. Thể tích hình chóp S.AMB bằng $\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\tan\alpha\cos\beta$.

Diện tích mặt cầu bằng $4\pi R^2(1+\cos^2\beta\tan^2\alpha)$.

Bài 46. Thể tích của hình tạo thành là tổng thể tích hai hình nón úp nhau và bằng $\dfrac{\pi a^3\sin^2 B\sin^2 C}{3\sin^2(B+C)}$.

Bài 47. Thể tích của hình tạo thành là thể tích hình nón cụt trừ đi thể tích hai hình nón và bằng $\dfrac{\pi bc(b+c)\sin\varphi\cos\dfrac{\varphi}{2}}{3}$.

E. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho tam giác vuông cạnh huyền a và góc nhọn α. Diện tích tam giác bằng:

A. $\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha$ B. $\frac{1}{2}a^2\cos 2\alpha$ C. $\frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha$.

2. Cho tam giác cân cạnh bên m và góc ở đỉnh bằng φ. Bán kính đường tròn nội tiếp của nó bằng:

A. $m\sin\frac{\varphi}{2}\tan\left(45^\circ-\frac{\varphi}{4}\right)$

B. $m\sin\varphi\tan\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$

C. $m\sin\frac{\varphi}{2}\cot\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. Bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác vuông có cạnh huyền c và góc nhọn β bằng:

A. $\dfrac{c}{\tan\frac{\beta}{2}+\tan(45^\circ-\beta)}$

B. $\dfrac{2c}{\cot\beta+\cot(45^\circ-\beta)}$

C. $\dfrac{c}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}$.

4. Tìm diện tích của một hình thang cân chiều cao h và góc giữa đường chéo với cạnh đáy lớn bằng α.

A. $S = h^2 \cot\alpha$ B. $S = h^2 \tan\alpha$ C. $S = \frac{1}{2}h^2 \cot\alpha$.

5. Hình thang có ba cạnh liên tiếp bằng a, b, c (a và c là độ dài hai cạnh đáy) và góc kề cạnh đáy c bằng φ có diện tích bằng:

A. $\frac{a+c}{2} \cdot b\sin\varphi$ B. $(a+c) \cdot b\sin\varphi$ C. $(a+c)b\cos\varphi$.

6. Một lăng trụ tam giác đều có góc giữa hai đường chéo các mặt bên kẻ từ một đỉnh bằng β và độ dài cạnh đáy là a có độ dài cạnh bên bằng:

A. $\frac{a}{\sin\beta} \cdot \sqrt{1 - 2\sin^2\beta}$

B. $\frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}$

C. $\frac{a}{2\sin\beta} \cdot \sqrt{1 - 4\sin^2\beta}$.

7. Một hình hộp chữ nhật có cạnh đáy bằng a và b, đường chéo của hình hộp tạo với mặt đáy một góc φ. Tính diện tích xung quanh của nó.

A. $2(a+b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \tan\varphi$

B. $(a+b) \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \cos\varphi$

C. $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin\varphi$.

8. Đáy hình chóp là một hình thoi có góc nhọn α. Mặt bên tạo với mặt đáy một góc β. Tính thể tích của nó biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp đáy bằng r.

A. $\frac{2r^3\tan\beta}{\sin\alpha}$ B. $\frac{4r^3\tan\beta}{3\sin\alpha}$ C. $\frac{8r^3\cot\beta}{3\sin\alpha}$.

9. Mặt xung quanh của một hình trụ trải ra thành một hình chữ nhật có đường chéo d tạo với cạnh đáy một góc φ. Tính thể tích hình trụ.

A. $\dfrac{d^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{2\pi}$ B. $\dfrac{d^3}{\pi}\cdot\cos^2\varphi\sin\varphi$ C. $\dfrac{d^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{4\pi}$.

10. Một hình nón có bán kính đáy R và đường sinh tạo với đáy một góc α. Thể tích hình nón này bằng:

A. $4\pi R^3\sin\alpha$ B. $\pi R^3\cot\alpha$ C. $\pi R^3\tan\alpha$.

Trả lời

1.	Đáp án C	**2.**	Đáp án A
3.	Đáp án C	**4.**	Đáp án A
5.	Đáp án A	**6.**	Đáp án B
7.	Đáp án A	**8.**	Đáp án B
9.	Đáp án C	**10.**	Đáp án C

MỤC LỤC

Vài dòng mở đầu 3

Dạng toán 1

CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 5

Dạng toán 2

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 34

Dạng toán 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 70

Dạng toán 4

CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC 130

Dạng toán 5

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 155

Dạng toán 6

TOÁN LƯỢNG GIÁC CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC 168

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN & NÂNG CAO
LƯỢNG GIÁC 11

LÊ HẢI CHÂU

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH
Biên tập: MINH HẢI, HOÀNG VĨNH
Sửa bài: HOÀNG NGUYÊN
Trình bày bìa: SƠN KỲ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9728452; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Mã số 1L – 137ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16x24 cm tại Công ty Cổ phần văn hóa Tân Bình
Số xuất bản 419-2007/CXB/09-68/ĐHQGHN cấp ngày 7-6-2007. QĐXB
số: 291 LK/XB. In xong và nộp lưu chiểu tháng Quý III năm 2007.